概要

本研究では、ブラックホールと大質量の円盤から成る系（ブラックホール-円盤系）の放出する重力波について、その検出可能性を論じた。

ブラックホール-円盤系は、大質量の金属欠乏星の重力崩壊によって形成され得る興味深い天体であるが、変形した円盤の回転によって重力波を放出することが知られている。そして、この重力波が過去の連星ブラックホール合体イベント（GW190521）を説明する可能性が、先行研究によって指摘されていた。すなわち、ブラックホール-円盤系の重力波が連星コンパクト天体の合体現象の重力波として見つかるかもしれないということである。そして、現在に至るまでコンパクト天体の連星合体に重力波の観測が数多く報告されてきたが、それ以外の天体については未だ観測されていない。その中でも、ブラックホール-円盤系は CBC パイプライン（連星コンパクト天体由来の重力波の探索に使う解析アルゴリズム）を誤認識しうるため、現状の重力波探索でも検出される可能性がある興味深い対象である。

本研究では GW190521 の説明に限らず、そもそもブラックホール-円盤系の重力波が検出され得るかという部分に焦点を置き、CBC パイプラインによる検出可能性を議論した。実際の重力波観測に使われている CBC パイプラインを一部簡略化して構築し、それを用いてブラックホール-円盤系由来の重力波のシミュレーションデータを解析、各モデルに対してその検出可能性を定量的に評価した。その結果、検出が十分に可能であると判断されたものが存在したため、パラメータに依存するものの、ブラックホール-円盤系由来の重力波は検出できるという結論に達した。その中で、先行研究の予想と食い違う部分も確認された。

目次

第 1 章

序論

1.1　重力波とは何か

重力波とは、一般相対性理論によってその存在が導かれる、時空間の歪みが波として伝播していく現象のことである。重力波は強い重力場が存在する天体現象によって発生する。

重力波の存在には、相対性理論の提唱者であるアインシュタイン自身が気付いていたと言われている。しかし、現実にその存在を確認するのは困難を極めた。その最大の理由は、重力波の振幅の小ささにある。重力波振幅の典型オーダーは 10^{-22}–10^{-21} 程度であり、当時の技術では到底観測できる筈もなかったのである。

重力波の直接観測が達成される以前にも、その存在の間接的な証拠は発見されていた。ラッセル・ハルス（Russell A. Hulse）とジョゼフ・テイラー（Joseph H. Taylor Jr.）は、プエルトリコにあるアレシボ天文台を使って連星パルサー PSR B1913+16 を発見した [1]。連星パルサーとは、中性子連星のうちの 1 つがパルサー*[1]になっているものを指す。パルサーの持つ周期的なパルスを放出する性質によって、連星系の公転周期を計測することができた。連星パルサーの公転周期の減衰速度が、一般相対論に従って重力波の放出を仮定したときの予測と、誤差の範囲内で正確に一致することが確かめられた。もし一般相対論が正しく、重力波が存在するならば、連星はその分のエネルギーを放出しなけれならない。連星から重力波として放出されるエネルギーを理論によって計算し、その分の軌道角運動量が抜き取られていくと考えると、公転周期の減少が予想されるのである。彼らはこの功績によって 1993 年のノーベル物理学賞を受賞した。

その後長らく連星パルサーが有力な重力波の状況証拠ではあったが、直接観測は依然困難であり、直接検出に至るまではかなりの時間を要することになった。2015 年、LIGO 科学コラボレーションおよび Virgo コラボレーションによって、重力波 GW150914 [2] が観測された。1915 年頃アインシュタインが一般相対性理論を構築してから、奇しくも丁度 100 年経過しての悲願達成であった。

一度重力波の観測が実現されると、今度はその重力波を道具として使う動きが加速していくことになる。重力波の直接観測によって、電磁波やニュートリノの観測だけでは見えなかった宇宙の様子を探索できる可能性が示されたのである。こうして、重力波天文学（gravitational-wave astronomy）と呼ばれる全く新しい学問が確立することになった。重力波の観測データを集積し、ブラックホールや中性子星といった今までアプローチが難しかった天体の性質を調べる研究が進んでいる。実際、観測された重力波のカタログであるGWTC（Gravitational-Wave Transient Catalog）は初観測から 10 年経たずで現在に至るまで 3 本発表されており [3–6]、イベント数にして 90 もの数に上っている。今後もデータが蓄積されていくことは論を俟たな

*1 パルサーとは、パルス状の電磁波を断続的・周期的に出す天体の総称である。正体は強い磁場を持ち回転する中性子星であるとされている。

い。重力波の研究は言わば、「0 を 1 にする」仕事から「1 を 10 にする」仕事への大転換が進んでいる真っ最中にあると言えよう。

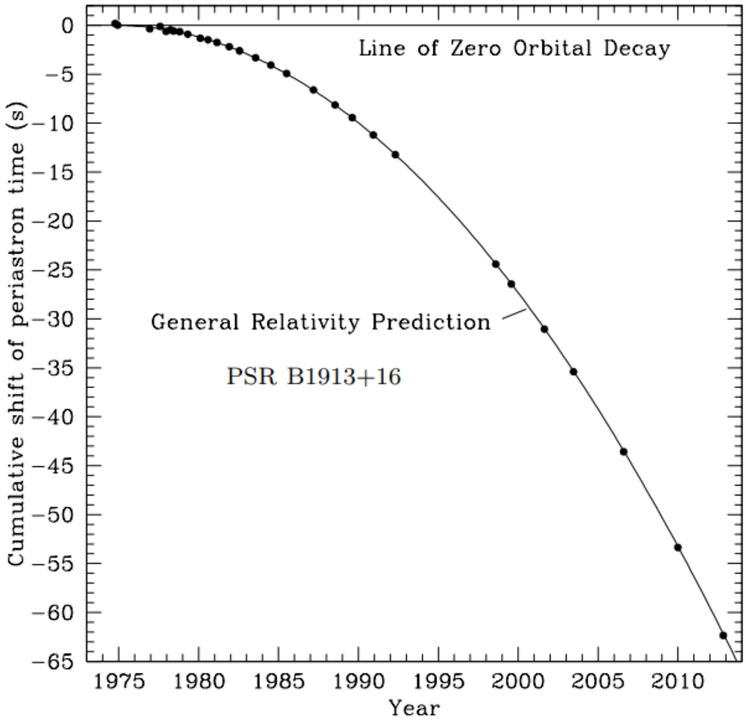


図 1.1　PSR B1913+16 の公転周期の減少をプロットしたもの。縦軸は公転周期の変化、横軸は時刻を表す。上の直線はニュートン重力、曲線は一般相対論による予測である。[7] より引用

1.2　本研究の位置付け

重力波天文学という黎明期にある学問は、まだ始まったばかりで多くの可能性を秘めている。本研究は、現在観測が確認されている唯一の重力波源である、連星ブラックホール・中性子星合体以外の重力波源に対する考察を深めるものである。本稿執筆時点では、コンパクト連星合体由来の重力波しか検出が確認されていないが、超新星爆発の重力波や原始重力波など確認はされていないものの魅力的な対象は多い。また、現在の重力波天文学では十分に考慮されていない天体現象もある。そのうちの 1 つがブラックホールと円盤が成す系（以下、ブラックホール-円盤系）である。ブラックホール-円盤系は、ブラックホールの周りを囲うように大質量のガス円盤が存在する系である。この系は、極めて大質量の金属欠乏星の重力崩壊によって形成されるものであり、未だ存在は確認されていないものの重力波天文学の対象として興味深く、これ自体は観測が期待されるものである。それに加えて特筆すべき点は、放出する重力波の形状にある。この系は、ガス円盤の変形によって重力波の放出されるのだが、その波形が連星ブラックホール合体で出てくる重力波と似ている（第 4 章）。そのため、重力波観測において連星ブラックホール合体とブラックホール-円盤系を混同してしまう可能性がある。

本研究では、CBC（Compact Binary Coalescence: コンパクト連星合体）検出パイプラインで、ブラックホール-円盤系由来の重力波が検出されうるかを検証する。CBC パイプラインは文字通り、連星合体をター

ゲットとしたものであり、それ以外の重力波源は当然考慮されていない。いわば、CBC パイプラインの「脆弱性」を追求する研究とも言える。ブラックホールとガス円盤の系から放出される重力波のシミュレーションデータを、実際の CBC 重力波検出と同様の手順に掛け、連星ブラックホール合体として有意だと判断されるかを検証する。今まで考慮されてこなかった天体現象由来の重力波を捉えられる可能性を示せれば、今後の重力波研究・重力波観測に重要な洞察を与えることになるだろう。また、ブラックホール-円盤系由来の重力波の検出可能性を明確に認識し、重力波研究コミュニティーに浸透させることは、更なる研究を促す嚆矢となり得る。

1.3 章ごとの内容

第 2 章では、重力波物理学の基礎について、本研究に関わる部分を整理する。第 3 章では、重力波検出器から得られた未処理のデータから、有意な重力波信号を取り出すための解析手法について書き付ける。なお、今回解析に使用するのは、`PyCBC` という実際の観測にも用いられている統合解析ツールであり、その詳細についても言及する。第 4 章では、本研究の元になった、大質量ブラックホール-円盤系が放出する重力波の研究について述べる。第 5 章では、`PyCBC` を用いた検出可能性の検証結果について報告する。

1.4 記号・記法

本論文中には種々の記号が登場する。原則として初めて使用する際に定義を与えるが、慣習的に用法が固定されているような記号に関しては、煩雑さを避けるためここに纏めて定義しておく。

表 1.1　本論文中で使用される記号とその意味

記号	意味
c	光速
G	万有引力定数
k_B	ボルツマン定数
$M_\odot$	太陽質量
d_L	光度距離
z	赤方偏移
α	赤経
δ	デルタ関数・赤緯
$\mathcal{F}$	フーリエ変換の演算子

一般相対性理論によく使われるベクトルやテンソルの添字には、ギリシャ文字とローマ字を使い分けるのが一般的である。一般に、ギリシャ文字 $\mu, \nu, \ldots$ の添字は 0–3 を走り、ローマ字 $i, j, \ldots$ の添字は 1–3 を走る記法が使われることが多く、本論文もこれに倣う。また、ベクトルやテンソルを用いた記述では、アインシュタインの縮約記法を採用する。これは上付き添字と下付き添字で同じものが存在するときは、その添字について

和を取るという記法である。

$$a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu \tag{1.4.1}$$

$$a_i b^i = \sum_{i=1}^{3} a_i b^i \tag{1.4.2}$$

また本論文では、上記の記法に加えて抽象添字記法（abstract index notation）と呼ばれる記法を採用する（詳しくは [8] の 2 章 4 節を参照)。テンソルは座標基底を決めなければ成分表示できないが、座標の取り方によって実際の物理が変わることはない。そこで、一般論を述べる際には座標を積極的に決めるのではなく、保留しておく立場に立ち、座標を取らない記述を念頭に置いているときはローマ字 $a, b, c, \ldots$ を使う。例えば、$(3, 2)$ 型のテンソル X は

$$X^{abc}{}_{de} \tag{1.4.3}$$

のように書かれる。このローマ字は、特定の座標成分のインデックスを表すのではなく、あくまでテンソルの型を表示するための文字スロット程度の意味しかない。なお、縮約は普通の記法通りに使うことができる。これは、縮約を取る際には上付き添字の変換性と下付き文字の変換性が打ち消し合うため、well-defined な記法になっているからである。$(0, n)$ 型テンソル T の対称部分と反対称部分について、$T_{(a_1 a_2 \cdots a_n)}, T_{[a_1 a_2 \cdots a_n]}$ と表すことにする。つまり

$$T_{(a_1 a_2 \cdots a_n)} := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} T_{a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \cdots a_{\pi(n)}} \tag{1.4.4}$$

$$T_{[a_1 a_2 \cdots a_n]} := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) T_{a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \cdots a_{\pi(n)}} \tag{1.4.5}$$

である。ここで、S_n は n 次置換群である。

第 2 章

重力波物理学の基礎

本章では、重力波を用いた天文学・宇宙論を展開する上で必須となる重力の理論及び重力波物理の理論的基礎を詳説する。また、重力波の応用例や有用性も紹介していく。

2.1　一般相対性理論とアインシュタイン方程式

重力波の存在は、重力と時空を統一的に記述する一般相対性理論（一般相対論）によって導出することができる。まず、一般相対論について概観していく。本節は [8–17] を参考にしている。

2.1.1　一般相対論の導入

相対論では、まず時空に対して（直感的には自明な）仮定を置く。時空とは「事象」の連続的な集合であり、事象は時刻と空間座標を融合させた概念である。そして時空は 4 次元多様体である、とする。このことは、全ての事象は（少なくとも十分小さい近傍において）4 つのパラメータで区別することができることを意味する。

一般相対論の前に完成していた特殊相対論（special relativity）では、光速度不変の原理と特殊相対性原理を仮定して理論が構築された。光速度不変の原理は、真空中の光速がどの観測者から見ても変わらないと考える。この仮定の帰結として、因果構造は各事象について備わるものであって、全事象に普遍的な因果構造は存在しない。時空はニュートン力学で考えたようなユークリッド空間ではなく、ミンコフスキー時空を取らなければならない。ミンコフスキー時空では、ベクトルの内積が非負とは限らず、時間方向を第 0 成分とした計量

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

を使って計算される。ノルムが正であれば空間的（space-like）、負であれば時間的（time-like）、0 であればヌル（null）と言われる。一方、特殊相対性原理は任意の慣性系で物理法則が不変であることを仮定する。慣性系同士の変換は、ローレンツ変換（Lorentz transformation）によって行われるから、ローレンツ変換で物理法則が不変であればよい。

一般相対論（general relativity）は、特殊相対論に重力の記述を加えたものである。一般相対論の仮定は、等価原理と一般相対性原理である。等価原理（equivalence principle）は「慣性質量と重力質量が等しい」という観察から得られた、「非慣性系における慣性力と、重力は原理的に区別できない」という指導原理である。これを採用すると、一定加速度系と一様重力場のある系は区別できなくなる。一般相対性原理は、慣性系のみ

ならず、非慣性系まで含めた任意の座標系で物理法則が不変の形式であるという原理である。数式の上では「一般座標変換（座標基底の取り替え）によって物理法則は不変である」ということである。一般座標変換に対して物理法則が形が不変であるためには、物理法則はテンソルを使って書かれる必要がある。このような前提の下で、時空は計量テンソル g_{ab} が入った多様体 $\mathcal{M}$ となり、重力は時空の幾何学に埋め込まれた「幾何学的な」概念となって、曲率（平坦な時空からのずれ）が重力場に起因する物理現象を説明する。例えば自由落下は、曲がった時空上の測地線に過ぎず、慣性の法則は「重力以外の外力が働かないとき、試験粒子は測地線上を動く」と言い換えられる。

2.1.2　アインシュタイン方程式

一般相対論における基礎方程式がアインシュタイン方程式（Einstein equation）である。アインシュタイン方程式は、等価原理によって幾何学的概念へと落とし込まれた重力と、時空中のエネルギー分布との対応を記述するものである。宇宙項[*1] を考慮しない場合、アインシュタイン方程式は、

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{2.1.3}$$

と書かれる。ここで G_{ab} はアインシュタインテンソル、T_{ab} は 4 元エネルギー運動量テンソルであり、比例係数はニュートン重力との整合性を考えて決定される。左辺が時空の構造を表しており、右辺がエネルギーの分布を表している。

2.1.3　ブラックホール

超高密度の状況のもとでアインシュタイン方程式を解くと、時空の中に光さえも脱出できなくなる領域が生じることがある。その内部から光が出られない領域[*2]を、ブラックホール（black hole）と呼ぶ。

シュヴァルツシルト解（Schwarzschild solution）は、球対称で静的（static）な質量 M の質量分布で出来る重力場を記述する。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_{\mathrm{s}}}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_{\mathrm{s}}}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{2.1.4}$$

$$r_s := \frac{2GM}{c^2} \tag{2.1.5}$$

r_s はシュヴァルツシルト半径と呼ばれ、$r \leq r_s$ の領域がブラックホールとなる。

質量分布が回転して角運動量 J を持つ場合は、カー解（Kerr solution）となる。$a = J/M$ として、ボイ

---

*1 アインシュタイン方程式に、定数 Λ を使った項を追加して、

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{2.1.2}$$

とすることは禁止されない。ここで追加した項 Λg_{ab} のことを宇宙項（cosmological term）と呼ぶ。左辺に移項すると、これはエネルギー運動量テンソルの値を時空全体で増減させ、宇宙全体の幾何に影響を与える。現在は宇宙の加速膨張が確認 [18, 19] され、その説明のために $\Lambda > 0$ とした宇宙項を考える場合が多い。$\Lambda > 0$ の場合は、時空自身が斥力を持つようになり、加速膨張を説明できる。しかし、Λ の起源は全くもって不明であるのでダークエネルギー（dark energy）と呼ばれ、現代宇宙論最大の謎の 1 つである。

*2 正確な定義を述べておく。時空 $\mathcal{M}$ の未来方向のヌル無限遠を $\mathscr{I}^+$ とする。この $\mathscr{I}^+$ の因果的過去の集合 $J^-(\mathscr{I}^+)$ を考えたとき、$B := \mathcal{M} - J^-(\mathscr{I}^+)$ が $B \neq \varnothing$ であるならば、B はブラックホールと呼ばれる。この B の境界 ∂B が事象の地平面になる。

ヤー・リンキスト座標（Boyer-Lindquist coordinate）を使って書くと以下のようになる。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4GMar\sin^2\theta}{c^2\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\Xi}{\Sigma}\sin^2\theta d\phi^2 \tag{2.1.6}$$

$$\Sigma := r^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2\cos^2\theta \tag{2.1.7}$$

$$\Delta := r^2 - \frac{2GM}{c^2}r + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \tag{2.1.8}$$

$$\Xi := \left[r^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2\right]\Sigma + \frac{2GM}{c^2}\left(\frac{a}{c}\right)^2 r\sin^2\theta \tag{2.1.9}$$

カーブラックホールの事象の地平面は 2 つあり、

$$r = r_\pm := M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \tag{2.1.10}$$

に位置する。

さらに電荷 Q も持つ場合はカー・ニューマン解（Kerr-Newman solution）で記述することができる。

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}\left(cdt - \frac{a}{c}\sin^2\theta d\phi\right)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left[\left(r^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2\right)d\phi - adt\right]^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 \tag{2.1.11}$$

$$\Sigma := r^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2\cos^2\theta \tag{2.1.12}$$

$$\Delta := r^2 - \frac{2GM}{c^2}r + \left(\frac{a}{c}\right)^2 + r_Q^2 \tag{2.1.13}$$

$$r_Q := \sqrt{\frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 c^4}} \tag{2.1.14}$$

軸対称な定常的（stationary）なブラックホールはカー・ニューマン解に限られ、この結果はブラックホール無毛定理（black hole no-hair theorem）[9] として知られている。つまり、ブラックホールは、重力崩壊以前の星が何で構成されていたかに関わらず、質量・角運動量・電荷の 3 つのパラメータで記述することができるという驚異的な普遍性を持つ。さらに、現実の宇宙物理学的な状況を考えると、電荷を持つブラックホールが存在したとしても宇宙空間中のプラズマが流入してすぐに中性化してしまうので、質量と角運動量だけを考慮することがほとんどである。ブラックホールの質量そのものには制約はなく、幅広い質量のブラックホールが確認されている。質量帯に応じて以下のように大まかな分類がなされている。

- 恒星質量ブラックホール（stellar-mass black hole）: 10^0–$10^2 M_\odot$ の質量
  恒星進化の最終段階としての重力崩壊（附録 B 参照）によって直接作られる大きさのブラックホール。
- 中間質量ブラックホール（IMBH:intermediate-mass black hole）: 10^2–$10^5 M_\odot$ の質量
  この質量帯のブラックホールは存在確認が乏しいことが知られている。
- 超大質量ブラックホール（SMBH:supermassive black hole）: 10^5–$10^{10} M_\odot$ の質量
  殆どの銀河中心に存在するが、形成のメカニズムは詳しくは分かっていない。よく知られた例として M87*（図 2.1）がある。

一方、角運動量には制約があり、カーブラックホールの事象の地平面は式 (2.1.10) から分かる通り、$|a| \leq M$ でなければ存在しえない。逆に、$|a| > M$ の状況下では、事象の地平面が無くなってしまい、ブラックホール内部にあるべきだった特異点が露出してしまう。裸の特異点が存在してしまうと時空全体の因果性が壊れてしまうため、このような特異点は自然に存在しないと一般的には考えられており、この仮説のことを宇宙検閲官仮説 (cosmic censorship conjecture) [20, 21] という。

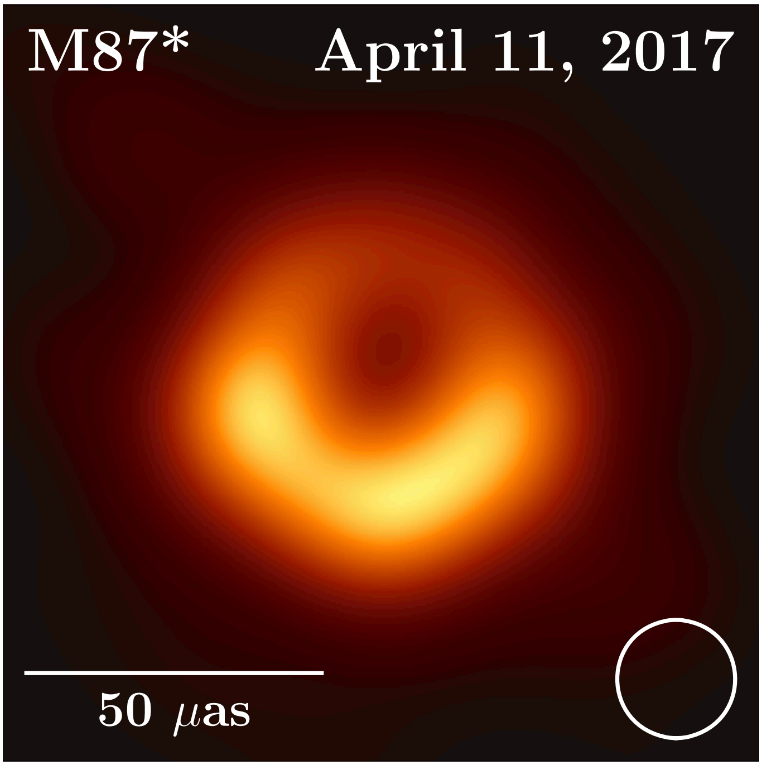


図 2.1　M87 銀河の中心にある超大質量ブラックホール M87*を直接撮影した画像。ブラックホール自体は光を出さないが、ブラックホールの周りを光子が回ってできる光子球と、ブラックホールシャドウと呼ばれる光らない部分が初めて撮影された。[22] より抜粋

2.1.4　線形重力

平坦時空（ミンコフスキー時空）の計量を $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ とおく。そこから微小にずれた計量 $g_{\mu\nu}$ を考え、ずれの分を $h_{\mu\nu}$ で表すことにする。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.1.15}$$

このように、計量に摂動を加え、h_{ab} の 1 次までを取って考える重力理論を線形重力理論という。

ここで、いくつか計算上の慣習を整理する。添字の上げ下げは η_{ab} で行い、偏微分 ∂_a は η_{ab} に対応した微分であると考える。但し、g^{ab} は $\eta^{ac}\eta^{bd}g_{cd}$ ではなく、g_{ab} の逆として定義しているから、h の 1 次まで取って

$$g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab}. \tag{2.1.16}$$

線形重力でのアインシュタイン方程式を求めるのが差し当たりの目標である。

2.1.5　線形アインシュタイン方程式

クリストッフェル記号

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\right) \tag{2.1.17}$$

に式 (2.1.15) と (2.1.16) を代入して、1 次まで取ると

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}\eta^{cd}\left(\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}\right) \tag{2.1.18}$$

リッチテンソル

$$R_{ab} = R^c{}_{acb} = \partial_c \Gamma^c{}_{ab} - \partial_a \Gamma^c{}_{cb} + \Gamma^e{}_{ab}\Gamma^c{}_{ec} - \Gamma^e{}_{cb}\Gamma^c{}_{ca} \tag{2.1.19}$$

を線形化すると、$\Gamma\Gamma$ の項は消えて

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{ab} &= \partial_c \Gamma^c{}_{ab} - \partial_a \Gamma^c{}_{cb} && (2.1.20)\\
&= \frac{1}{2}\left\{\eta^{cd}(\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab})\right\} && (2.1.21)\\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{\eta^{cd}(\partial_c h_{bd} + \partial_b h_{cd} - \partial_d h_{cb})\right\} && (2.1.22)\\
&= \frac{1}{2}\left(\partial^c \partial_b h_{ac} - \partial_c \partial^c h_{ab} - \partial_a \partial_b \left(\eta^{cd} h_{cd}\right) + \partial_a \partial^c \partial_{ch}\right) && (2.1.23)\\
&= \partial^c \partial_{(b} h_{a)c} - \frac{1}{2}\partial_c \partial^c h_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a \partial_b h && (2.1.24)
\end{aligned}$$

アインシュタインテンソルは

$$\begin{aligned}
G^{(1)}_{ab} &= R^{(1)}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab} R^{(1)} && (2.1.25)\\
&= \partial^c \partial_{(b} h_{a)c} - \frac{1}{2}\partial^c \partial_c h_{ab} && (2.1.26)\\
&\quad - \frac{1}{2}\partial_a \partial_b h - \frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c \partial^d h_{cd} - \partial^c \partial_c h) && (2.1.27)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\bar{h}_{ab} := h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab} h \tag{2.1.28}$$

というテンソルを新たに定義すると、線形化されたアインシュタイン方程式として

$$G^{(1)}_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^c \partial_c \bar{h}_{ab} + \partial^c \partial_{(b} \bar{h}_{a)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab} \partial^c \partial^d \bar{h}_{cd} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{2.1.29}$$

を得る。

ここで、ゲージ自由度を固定することを考える。線形理論には、ゲージ自由度として

$$h_{ab} \to h_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a \tag{2.1.30}$$

というものがある。ここで

$$\partial^b \partial_b \xi_a = -\partial^b \bar{h}_{ab} \tag{2.1.31}$$

の解として ξ_a を取ると、

$$\partial^b \bar{h}_{ab} = 0 \tag{2.1.32}$$

となって、アインシュタイン方程式 (2.1.29) は

$$\partial^c \partial_c \bar{h}_{ab} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{2.1.33}$$

となる。この式 (2.1.33) を線形アインシュタイン方程式と呼ぶことにする。真空 ($T \equiv 0$) ならば、

$$\partial^c \partial_c \bar{h}_{ab} = 0 \tag{2.1.34}$$

と、質量ゼロ・スピン 2 の自由粒子を表す式になる[*3]。

2.1.6　重力波と TT ゲージ

さて、真空中で式 (2.1.32) と (2.1.34) を得たが、まだアインシュタイン方程式の自由度は残っている[*4]。すなわち、エネルギー・運動量保存則が考慮されておらず、ここに拘束条件が必要である。保存則を満たしながら時間発展を行うための拘束条件が 4 つあると考えれば、1 階の微分方程式 4 本の自由度が残る。更なるゲージ固定として

$$\partial^b \partial_b \xi^a = 0 \tag{2.1.35}$$

を取り、$T_{ab} = 0$ の条件下で $h = 0, h_{0\mu} = 0$ ($\mu = 1, 2, 3$) とすることを考える。

初期時刻 $t = t_0$ において、$\vec{\xi}$ が ξ^a の空間成分ベクトル、$\nabla\cdot$ が 3 次元ベクトル演算における発散（divergence）を表すものとして

$$2\left(-\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{\xi}\right) = -h \tag{2.1.36}$$

$$2\left[-\nabla^2 \xi_0 + \nabla\cdot\left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}\right)\right] = -\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.1.37}$$

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial t} = -\gamma_{0\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3) \tag{2.1.38}$$

$$\nabla^2 \xi_\mu + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \gamma_{0\mu}}{\partial t} \quad (\mu = 1, 2, 3) \tag{2.1.39}$$

を解き、初期値（$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ とその時間微分）を得る。ξ^a を (2.1.35) の解で、式 (2.1.36)–(2.1.39) を初期条件ととするものとする。(2.1.36) より、

$$f_0 := 2\left(-\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{\xi}\right) + h \tag{2.1.40}$$

とおくと、これは $t = t_0$ において $f_0 = 0$ を満たす。また、(2.1.37) より、

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = 2\left(-\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{\xi})\right) + \frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.1.41}$$

$$= 2\left[-\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{\xi}) + \nabla^2 \xi_0 - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{\xi})\right] \tag{2.1.42}$$

$$= -2\partial^a \partial_a \xi_0 = 0. \tag{2.1.43}$$

よって、常に $f_0 = 0$ が成立する。(2.1.36) の左辺は 0 だから、$h = 0$ を得る。次に、(2.1.38) より、

$$f_\mu := \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^\mu} + h_{0\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3) \tag{2.1.44}$$

[*3] 但し、この描像はあくまで線形理論の範囲内でしか成り立たない。
[*4] h_{ab} は対称テンソルだから全部で 10 自由度ある。(2.1.30) では 4 自由度使った。

は $t=t_0$ で $f_\mu=0$ となる。(2.1.39) より、

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \xi_0}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{0\mu}}{\partial t} \tag{2.1.45}$$

$$= \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \xi_0}{\partial x^\mu} - \nabla^2 \xi_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}\right) \tag{2.1.46}$$

$$= -\partial^a \partial_a \xi_\mu = 0. \tag{2.1.47}$$

よって、常に $f_\mu=0$ が成立する。言い換えれば

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^\mu} = -h_{0\mu} \tag{2.1.48}$$

となるようにでき、この下で変換を行うと

$$h_{0\mu} \to h'_{0\mu} = h_{0\mu} + \partial_0 \xi_\mu + \partial_\mu \xi_0 = 0. \tag{2.1.49}$$

ついでに、$h_{00}=0$ も成立する。$h=0$ より、$\bar{h}_{ab}=h_{ab}$。$h_{0\mu}=0$ より、(2.1.32) は

$$\frac{\partial h_{00}}{\partial t} = 0 \tag{2.1.50}$$

となる。線形アインシュタイン方程式 (2.1.33) は

$$\nabla^2 h_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{00} = 0 \tag{2.1.51}$$

であり、十分遠方で $h_{00}=0$ を課すと $h_{00}=0$ しか残らない。よって、よって、常に $h_{00}=0$ が成り立つ。

このゲージ固定の下で、真空中の線形アインシュタイン方程式の解を探す。波数ベクトル $k^\mu=(\omega/c,\vec{k})$ を使った平面波解

$$h_{ab} = H_{ab} \exp\left(i \sum_{k=0}^{3} k_\mu x^\mu\right) \tag{2.1.52}$$

（H_{ab} は定数）は

$$\sum_\mu k^\mu k_\mu = \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0 \tag{2.1.53}$$

を満たすときのみ、式 (2.1.34) の解となる。ゲージ固定条件が要求する拘束条件は以下の通りになる。

$$\begin{aligned} \partial^a \gamma_{ab} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{\mu=0}^{3} k^\mu H_{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = 1,2,3) \\ \gamma_{0\nu} = 0 \quad &\Rightarrow \quad H_{0\nu} = 0 \quad (\nu = 1,2,3) \\ \gamma = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{\mu=0}^{3} H^\mu_\mu = 0 \end{aligned} \tag{2.1.54}$$

このうち、$\sum_\nu k^\nu H_{0\nu}=0$ に 2 回言及しているから、独立な式は全部で 8 本ある。H_{ab} の自由度は元々 10 あり、残る真の自由度は 2 つ[*5]となる。このようにして取ったゲージのことを TT（Transverse-Traceless）ゲージという。TT ゲージは重力波の解析を行う上で最も重要なゲージの 1 つである。TT の意味は以下の通り。

[*5] この 2 つが、すぐ後に説明する重力波のプラスモードとクロスモードになる。

- Transverse（横波）であるとは、波の進行方向の成分が無いことを意味する:

$$k^a H_{ab} = 0 \tag{2.1.55}$$

- Traceless とは、対角成分の和（トレース）が 0 であることを意味する:

$$H^a_a = 0 \tag{2.1.56}$$

波の進行方向を z 軸とした座標系で具体的に書き下してみる。このとき $\vec{k} = \frac{\omega}{c}(0,0,1)$ で、(2.1.54) の条件より、

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ -h_\times & h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} \tag{2.1.57}$$

という形に制約される。この式を見ると、重力波は 2 つのモードを持っており、h_+ 成分がプラスモード、$h_\times$ 成分がクロスモードと呼ばれるものである。

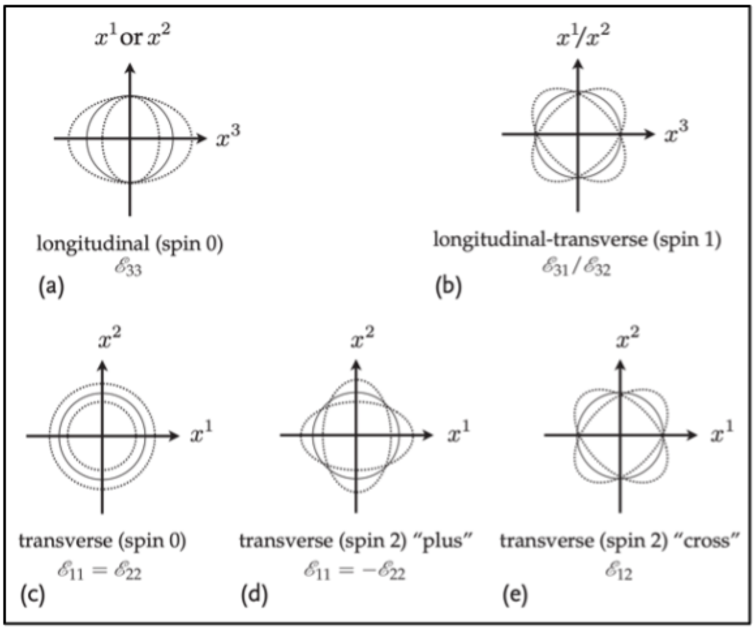


図 2.2　x^3 方向に進む重力波の偏極モードを図示したもの（ [17] より抜粋)。一般相対論では + モードと × モード（右下 2 つ）が出てくるが、修正重力理論においては他のモードも現れうる。

式 (2.1.52) で示された線形アインシュタイン方程式の波動解は、真空中において微小な時空の歪みが波となって伝わっていくことを意味している。これこそが重力波現象の理論的理解そのものであり、これは異なる 2 点での潮汐力を測定することで観測できる。そのための戦略については 2.3.1 項で述べる。

2.1.7　四重極公式

重力波を理論的に導出できたところで、今度は重力波の発生源について考えてみる。線形アインシュタイン方程式 (2.1.33)

$$\partial^c \partial_c \bar{h}_{ab} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ab}$$

の解は、事象 $x=(t,\vec{x})$ にある観測者から見ると以下のような遅延グリーン関数 G で与えられる。

$$G\left(x-x'\right)=-\frac{1}{4\pi\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}\delta\left(c(t_{\mathrm{ret}}-t')\right) \tag{2.1.58}$$

ここで遅延時間（通常の時刻から、波源からの伝播時間を引いたもの）

$$t_{\mathrm{ret}}:=t-\frac{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}{c} \tag{2.1.59}$$

を定義した。G を用いると解は

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\mu\nu}(x)&=-\frac{16\pi G}{c^4}\int d^4x'G\left(x-x'\right)T_{\mu\nu}\left(x'\right) &(2.1.60)\\ &=\frac{4G}{c^4}\int\frac{T_{\mu\nu}(t_{\mathrm{ret}},x')}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}d^3x' &(2.1.61)\end{aligned}$$

この解を、重力源の速度が光速よりも十分小さい[*6]として考える。$\bar{h}_{\mu\nu}$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega,\vec{x})&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{h}_{\mu\nu}(t,\vec{x})e^{i\omega t}dt &(2.1.62)\\ &=\frac{4G}{\sqrt{2\pi}c^4}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int d^3x\frac{T_{\mu\nu}\left(t_{\mathrm{ret}},\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}e^{i\omega t} &(2.1.63)\\ &=\frac{4G}{\sqrt{2\pi}c^4}\int_{-\infty}^{\infty}dt_{\mathrm{ret}}\int d^3x\frac{T_{\mu\nu}\left(t,\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}e^{i\omega\left(t_{\mathrm{ret}}+\frac{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}{c}\right)} &(2.1.64)\end{aligned}$$

$T_{\mu\nu}$ 成分のフーリエ変換を $\tilde{T}_{\mu\nu}$ と書くことで

$$\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega,\vec{x})=\frac{4G}{c^4}\int\frac{\tilde{T}_{\mu\nu}\left(\omega,\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}e^{i\omega\frac{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}{c}}d^3x' \tag{2.1.65}$$

となる。式 (2.1.32) に式 (2.1.65) を代入すると

$$-i\omega\tilde{\bar{h}}_{0\mu}=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial\tilde{\bar{h}}_{\nu\mu}}{\partial x^\nu} \tag{2.1.66}$$

を得るが、これは $\tilde{\bar{h}}_{0\mu}$ が空間成分によって決定されてしまうことを意味する。よって $\tilde{\bar{h}}_{ij}(i,j=1,2,3)$ だけを求めればよい。

観測者が重力源から十分離れている、つまり観測者と重力源の中心の距離 R が

$$R\gg\frac{1}{\omega}=\frac{\lambda}{2\pi} \tag{2.1.67}$$

として、多重極展開の手法を導入する。$T_{\mu\nu}$ が非零の領域では $\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|$ はほとんど変わらない。従って (2.1.65) の中で

$$\frac{e^{i\frac{\omega}{c}\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}\approx\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R} \tag{2.1.68}$$

---

*6 重力源の大きさ d、重力源の領域内での典型速度を v とすると、重力波の周波数オーダーは $\omega\sim v/d$、波長のオーダーは $\lambda\sim(c/v)d$ となる。$v\ll c$ は、$\lambda\gg d$ のときに実現されるから、ここで示した仮定を正確に述べると重力源の大きさが重力波の典型波長よりも十分小さいということである。

という近似を使って定数にすることができる。残る積分の部分は、$\partial_0 = \frac{1}{c}\partial_t$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\int \tilde{T}^{\mu\nu} d^3x &= \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{ \int \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\tilde{T}^{\alpha\nu} x^\mu\right) - \int \frac{\partial \tilde{T}^{\alpha\nu}}{\partial x^\alpha} x^\mu \right\} d^3x && (2.1.69)\\
&= \frac{-i\omega}{c}\int \tilde{T}^{0\nu} x^\mu d^3x && (2.1.70)\\
&= -\frac{i\omega}{2c}\int \left(\tilde{T}^{0\nu}x^\mu + \tilde{T}^{0\mu}x^\nu\right) d^3x && (2.1.71)\\
&= -\frac{i\omega}{2c}\sum_{\beta=1}^{3}\left\{ \int \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\tilde{T}^{0\beta}x^\mu x^\nu\right) d^3x - \int \frac{\partial \tilde{T}^{0\beta}}{\partial x^\beta} x^\mu x^\nu d^3x \right\} && (2.1.72)\\
&= -\frac{\omega^2}{2c^2}\int \tilde{T}^{00} x^\mu x^\nu d^3x && (2.1.73)
\end{aligned}
$$

と計算できる。ここで、1 行目から 2 行目への変形及び 4 行目から 5 行目への変形では、全微分の積分が表面項となって観測者と重力源が十分離れている状況を考えていると 0 にできることと、T_{ab} の保存によって空間成分の発散を時間成分の時間微分に書き換えられることを使った。質量四重極モーメントテンソル

$$Q^{ij}(t) := \frac{1}{c^2}\int T^{00}(t,\vec{x}) x^i x^j d^3x \tag{2.1.74}$$

を導入すると、(2.1.65) は

$$\tilde{\bar{h}}_{ij}(\omega,\vec{x}) = -\frac{2G\omega^2}{c^4}\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}\tilde{Q}_{ij}(\omega) \tag{2.1.75}$$

で、逆フーリエ変換を掛ければ

$$\bar{h}_{ij}(t,\vec{x}) = \left.\frac{2G}{c^4 R}\frac{d^2 Q_{ij}}{dt^2}\right|_{t=t_{\mathrm{ret}}} \tag{2.1.76}$$

を得る。式 (2.1.76) は、エネルギー運動量テンソルの四重極成分が加速度的に変化する場合にのみ重力波が放射されることを示し、四重極公式は（Quadrupole Formula）と呼ばれ、重力波の最低次モードを表す式である。逆に言えば、四重極成分が重力波として現れる最初のオーダーであり、単極子成分や双極子成分の変動では重力波は生成されない。この点は、本研究で考えるブラックホール-円盤系での重力波生成に深く関わっている。

単極子や双極子成分の変動で重力波が放射されないのは、エネルギー保存則と運動量保存則が関係している。まず、単極子成分を考えてみよう。質量モーメントの単極子とは

$$M = \int d^3x T^{00}(t,\vec{x}) \tag{2.1.77}$$

であるが、これは、局所的にエネルギーが定義できない一般相対論においては、単なるエネルギーの定義に他ならない。よってエネルギー保存則によって M が時間変化することは禁じられる。この点は電磁波の放射と似ていて、電磁波の場合は電荷保存則によって単極子放射が禁止されている。また、運動量保存則を課すと、時間変化する質量双極子モーメントは許されない。よって重力波では双極子放射も存在しない。

2.2 主要な重力波源

重力波を出す天文現象としては

過渡的 (transient) なもの

- コンパクト連星合体
- 超新星爆発

継続的なもの

- パルサー
- 原始重力波

などがある。本節では、これらについて詳しく述べる。

2.2.1 コンパクト連星合体

コンパクト天体（ブラックホールまたは中性子星）の連星合体は、現時点において観測が確認できている唯一の重力波源であり、重力波天文学では最もポピュラーなターゲットである。本研究では、ブラックホールのみを考えるので、連星ブラックホールに絞って記述する。連星ブラックホール合体の出す重力波波形は、インスパイラル（inspiral）・合体（merger）・リングダウン（ringdown）の 3 段階に分けられる特徴的な形をしている（図 2.3）。

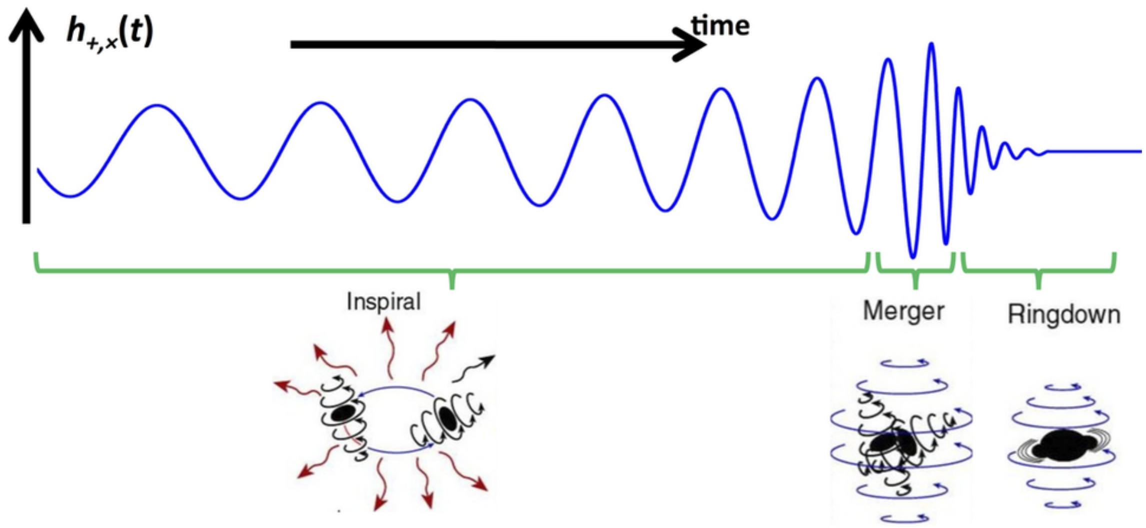


図 2.3　連星ブラックホールの合体による重力波のイメージ図。[23] より抜粋

インスパイラル部分は、連星が近づきながら楕円運動を起こすことで生じる。この段階では合体に至るまで、周波数が高くなっていくとともに、振幅が大きくなっていく特徴的な波形を示す。時間経過とともに周波数が単調に変化する波形は、チャープ（chirp）波形[*7]と呼ばれ、このチャープ性こそがコンパクト連星合体による重力波の大きな特徴となっている。連星が近づいていくとやがて合体し、そこで振幅が最大になる。合体後は急激に振幅が減少するリングダウン段階に入る。このときのブラックホールは、定常状態から少しずれた状態にあると考えることができ、準固有振動（quasinormal oscillation）という減衰共鳴振動を起こす。ここで放出される重力波のモードを準固有モード（quasinormal mode）と呼ぶ。この過程を経て徐々に重力波を出さない定常状態に落ち着いていく。これが連星合体の重力波の全体像である。

*7 チャープと言う名前は英語での鳥の発するチャープ音（囀り）がもとになっている

重力波の四重極近似の波形をプラスモードとクロスモードに分けて書くと、ι は軌道軸から測った観測者方向の角度、$t_R = t - r/c$ を遅延時間として、

$$h_+(t) = \frac{4}{rc^4}(G\mathcal{M})^{5/3}(\pi f(t_{\rm ret}))^{2/3}\left(\frac{1+\cos^2\iota}{2}\right)\cos(\Phi(t_{\rm ret})) \tag{2.2.1}$$

$$h_\times(t) = \frac{4}{rc^4}(G\mathcal{M})^{5/3}(\pi f(t_{\rm ret}))^{2/3}\cos\iota\sin(\Phi(t_{\rm ret})) \tag{2.2.2}$$

Φ は連星運動の位相である。

円軌道で動く連星コンパクト天体から放出される四重極波の周波数変化は [12]、

$$\dot{f} = \frac{96}{5}\pi^{8/3}\left(\frac{G\mathcal{M}_c}{c^3}\right)^{5/3} f^{11/3} \tag{2.2.3}$$

ここで、チャープ質量（chirp mass）と呼ばれる概念を導入した。

$$\mathcal{M}_c := \frac{(M_1M_2)^{3/5}}{(M_1+M_2)^{1/5}} \tag{2.2.4}$$

連星コンパクト天体系はチャープ質量によって重力波の「周波数」が決まる性質を持つため、宇宙論において標準音源（standard siren）*8と呼ばれ、ハッブル定数の直接推定などに応用されている。遠方の連星系をフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー時空の下で考えると、上式は $r \to d_L, \mathcal{M} \to (1+z)\mathcal{M}$（$z$: 赤方偏移）という変更を受ける。この重力波を観測することで、波形 h と f、$\dot{f}$ が分かり、そこからチャープ質量を計算できる。そしてチャープ質量が分かれば、連星系までの光度距離を求めることができ、これを対応する電磁波*9の観測によって特定した z の値と合わせれば、ハッブル定数を推定できる。

現在のハッブル定数の推定では、近傍の宇宙観測から距離のはしごを継ぎ足して得られた値と、初期宇宙由来の CMB から算出した値に無視できないギャップが生じており、これはハッブルの緊張関係（the Hubble tension）と呼ばれる重要な問題提起 [25] になっている。このことは、「現在の宇宙論で標準的となっている Λ-CDM モデルに修正が必要か、或いはハッブル定数の推定手法のいずれかに誤りがあるのではないか？ はたまたハッブル定数は実は定数ではないのではないか？」といった憶測や提案を生み、現代宇宙論において盛んに議論されている話題である。なお、[26] による推定は今までの推定値の丁度中間に位置するような値を得ており、ハッブルの緊張関係をより深めるのか、或いは調停するのか分からない結果になっている（図 2.4)。

2.2.2 超新星爆発

超新星爆発は、重い恒星の終焉の際に起きるとされる高エネルギー天体現象である。1987 年に観測された SN 1987A [27] を筆頭に、ニュートリノ観測のターゲットとしての存在感が強いが、重力波観測の主要なターゲットでもある。超新星爆発の成り立ちや種類については附録 B での説明に譲るとして、ここでは超新星爆発が出す重力波について述べる。

中心部の四重極以上のモードでの変動や非等方的なニュートリノ放射によって重力波が生じると考えられている [28]。現時点では超新星爆発からの重力波の検出は達成されていないが、それを困難にしている点とし

*8 Ia 型超新星などが標準光源（standard candle)、バリオン音響振動が標準定規（standard ruler）と呼ばれているのに沿った表現である。

*9 ブラックホール同士の合体の場合には電磁波の放出が無い。そのため連星 BH は、天球面上での位置特定の精度が高くホスト銀河が特定出来ている場合を除いては、この手法の対象とはならない。

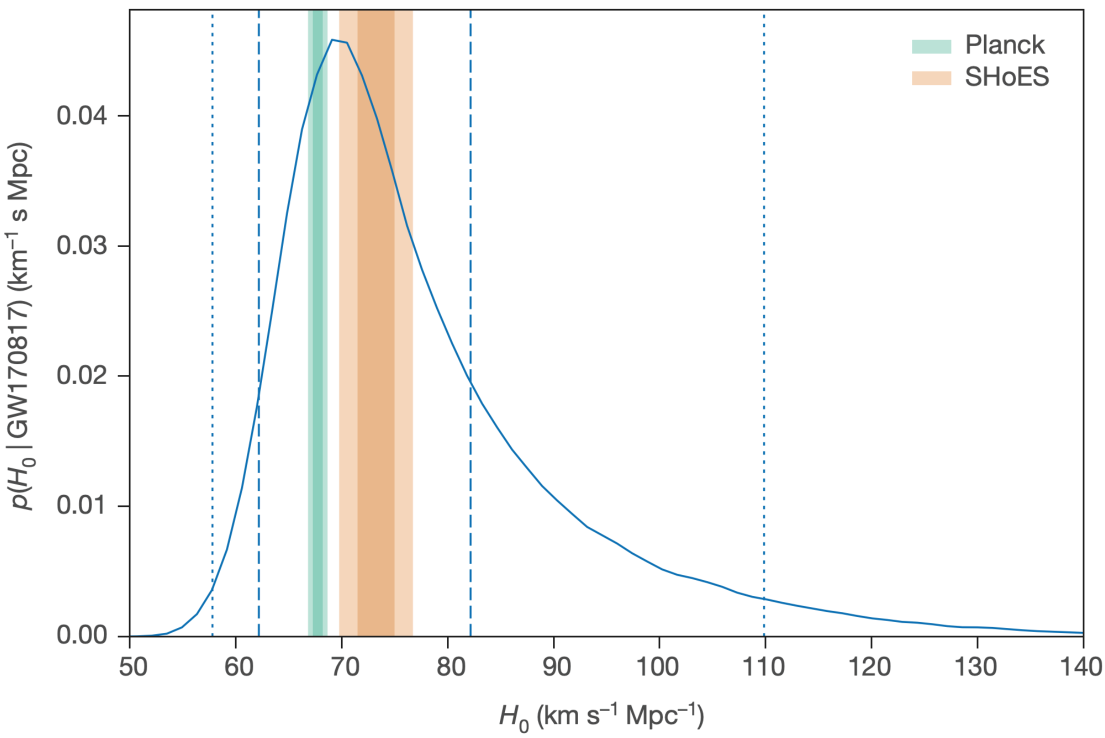


図 2.4　連星中性子星合体 GW170817 のデータを用いて s、ハッブル定数の値をベイズ推定した結果 [24]。事後分布のピークは他の手法の結果（緑と橙の領域）のどちらも支持していないようにも見える。

て、波形予測が容易でないことが挙げられる。超新星爆発は理論的なモデル構築が難しく、波形テンプレートを用意することができない。また、爆発は基本的に球対称に近い形で起こるため、余程地球の近くで爆発が起きない限り重力波の振幅はそこまで大きくならないことも観測を難しくしている。

2.2.3　パルサー

パルサーは、電磁波パルスを周期的に発している天体であり、その正体は高速回転する中性子星であると考えられている。中性子星の表面に山のように盛り上がっている箇所があって非軸対称性がある場合、重力波の四重極モードが励起される。ここから出てくる重力波は連続重力波と呼ばれ、ほぼ一定の振幅と周波数を長時間継続して持つ。

2.2.4　原始重力波

ビッグバン宇宙論は、宇宙マイクロ波背景放射（CMB:Cosmic Microwave Background）と元素合成を良く説明するという点で、現代宇宙論の主流となっている説である。しかしながら、素朴なビッグバン宇宙論には幾つかの問題がある。

- 地平線問題
  現在の観測可能な宇宙は、CMB 観測によって高い精度で一様であることが示されている。CMB は宇

宙の晴れ上がり時の温度を示すものだが、晴れ上がり時点で約 37 万年（$z = 1090$）経過しており、その時点で因果関係を持っていなかった筈の領域がほぼ同じ温度を示しているのは何かしらの理由付けが必要であると考えられる。

- 平坦性問題

CMB の温度ゆらぎの観測によって、現在の宇宙の曲率は 0 に近く、ほぼ平坦であることが確かめられている。スケール因子を a、宇宙の空間曲率を K として、（宇宙項を考慮しない）フリードマン方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - c^2 K \tag{2.2.5}$$

このうち左辺はハッブルパラメータと呼ばれ、

$$H := \frac{\dot{a}}{a} \tag{2.2.6}$$

と書かれる。H の現在の値がハッブル定数と呼ばれるものである。

$$H_0 := \left.\frac{\dot{a}}{a}\right|_{t=t_0} \tag{2.2.7}$$

以降宇宙論パラメータの現在の値には添字 0 を付けて表すことにする。このフリードマン方程式において、平坦（$K = 0$）な宇宙のエネルギー密度のことを臨界密度 ρ_c と呼ぶ。

$$\rho_c := \frac{3c^2 H^2}{8\pi G} \tag{2.2.8}$$

裏を返せば、宇宙の密度が臨界密度より大きいか小さいかで宇宙の曲率が決定される。ここで、密度パラメータ Ω、曲率パラメータ Ω_K を

$$\Omega := \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2 H^2} \tag{2.2.9}$$

$$\Omega_K := -\frac{c^2 K}{a^2 H^2} \tag{2.2.10}$$

と定義する。(2.2.5) は

$$\Omega + \Omega_K = 1 \tag{2.2.11}$$

となり、2 つのパラメータの和は常に 1 になる。ところで、Planck 衛星による現在の曲率パラメータの観測値 [29] は

$$\Omega_{K0} = 0.0007 \pm 0.0019 \tag{2.2.12}$$

という値が得られており、これは現在の宇宙がかなり平坦に近いことを示している。宇宙の曲率は時間発展によって拡大されていくが、この値が現在実現されているためには宇宙初期に遡って考えると不自然な点が出てくる。現在の値から過去の Ω_K を計算する式は

$$\Omega_K = \frac{{H_0}^2}{a^2 H^2}\Omega_{K0} \tag{2.2.13}$$

だが、古典的な宇宙の限界とされるプランク長スケールの時代を考えると、$\Omega_K \sim 10^{-60}$ のオーダーになる。初期宇宙における Ω の 1 からのわずかなずれは、何十億年にもわたる膨張の間に拡大される筈である。(2.2.11) より、

$$\Omega = 1 - \Omega_K \tag{2.2.14}$$

であるから、宇宙の密度パラメータ Ω が宇宙初期においては 10^{-60} 以上の精度で微調整（fine-turning）されていなければならない。これは明らかに不自然である。

- モノポール問題
  宇宙初期には大きなゲージ対称性が成り立っていることが期待され、そうだとすると時間が経つに連れて位相欠陥としてモノポール（磁気単極子）が大量に生成されるが、現在の観測では何故か確認できていない。

以上に述べた諸問題を解決するための仕組みとして考案されたのが、インフレーション（inflation）仮説である。インフレーションとは、ビッグバン直後の量子的なスケールの宇宙が古典的なスケールへと移行する前に、何らかの機構で宇宙が指数関数的な膨脹を経験したとする説である。現在に至るまで様々なマイナーチェンジが考案されているが、代表的なモデルでは、インフラトンと呼ばれるスカラー場がスケール因子を指数関数的に成長させると考えられている。今のところ決定打となる観測的裏付けは無いが、ビッグバン宇宙論を補強するものとして多くの研究者によって支持されている仮説である。もし、インフレーションが実際に起こったとすると、量子的なスケールの宇宙に存在した時空（重力場）の揺らぎが引き伸ばされ、それが重力波として見える可能性がある。これは原始重力波（primordial gravitational wave）と呼ばれている。

2.3 重力波観測の実際

現在稼働している主要な重力波検出器は全てマイケルソンレーザー干渉計の原理を応用した、レーザー干渉計型検出器である。その他、過去にはバー型と呼ばれる形態の検出器も考案されたものの、実際に重力波検出へと至ることは無かった[*10]。そのため、本節ではレーザー干渉計を用いた重力波検出の原理を述べることにする。その後、現在稼働中の重力波望遠鏡や今後予定されている重力波観測計画についてもそれらの特徴とともに紹介する。

2.3.1 重力波検出の原理

一般相対論が仮定する等価原理[*11]の主張によれば、重力を局所的に見ると、それは加速度運動する系が感じる慣性力と区別がつかない。よって、重力波を検出するには異なる 2 点間の重力場の差を調べてやる必要がある。それを実現するために、レーザー干渉計を使った重力波検出法が考案された。[*12]

レーザー干渉計とは、異なる 2 方向にレーザーを発射し、その光を鏡で反射させ帰ってきた別々の光を干渉させる装置を指す。レーザーの通る道はアーム（腕）と呼ばれ、2 本のアームが直交するように設計されている場合が多い。2 方向に飛んでいった光の位相差を干渉光の強度によって読み取ることで、その光が通ってきた光路長に差があるならばそれを検出することができる。すなわち、2 本のレーザーを干渉させ、その干渉光

*10 重力波検出が報告されたこともあった [30] が、疑義が掛かり、現在では結果として認められていない。
*11 正確には、アインシュタインの等価原理 (Einstein's equivalence principle, EEP)。
*12 本項及び次項についての、より詳細な議論は [31] を参照。

の強度を測定することで位相差（＝アームの長さの変化）を読み取る。また、干渉光の強度が時間変化すれば、それはレーザーがアームの長さの時間変化を感じていることを意味する。

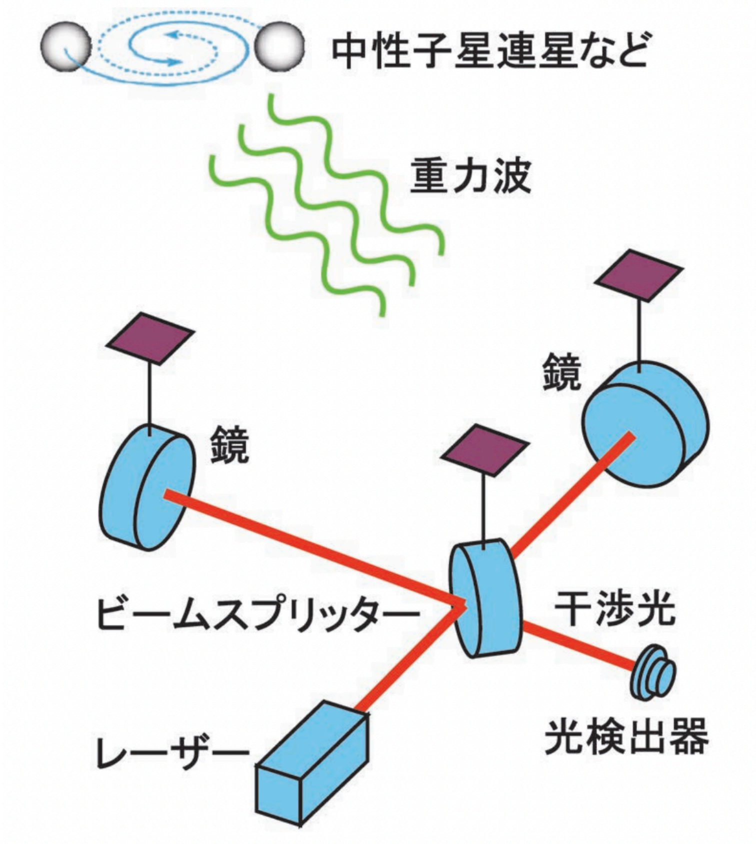


図 2.5　レーザー干渉計型重力波検出器のイメージ図。[32] より引用。

まず、重力波による時空の歪みが光の飛行時間に現れることを簡単な例で見てみる。3 次元空間の直交座標系を 1 つ取って、原点に観測者（ビームスプリッター）があり、そこから x 軸方向へ離れた $(L_0, 0, 0)$ に鏡が置かれているとする。このとき、光の軌道は次の方程式を満たす。

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1 + h_{11})(dx_1)^2 = 0 \tag{2.3.1}$$

これを解くと、

$$dt = \frac{\sqrt{1 + h_{11}}}{c}|dx_1|^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2}h_{11}\right)\frac{|dx_1|^2}{c} \tag{2.3.2}$$

を得る。よって、光がビームスプリッターと鏡の間を往復するのに掛かる時間は

$$T_1 = \left(1 + \frac{1}{2}h_{11}\right)\frac{2L_0}{c} \tag{2.3.3}$$

と計算できる。これはミンコフスキー時空で考えた飛行時間 $T_0 = \frac{2L_0}{c}$ から変化しており、少なくとも原理的には重力場の変化を観測できることが分かる。しかし、1 方向だけで観測を行うのは現実的に難しく、2 方向に飛ばしたレーザーの時間差（位相差）を見るのがよい。

さて、実際のレーザー干渉計では 2 方向にアームが伸びているから、上記の議論を拡張する必要がある。原点からアームの伸びている方向を指す単位ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とおく。上記の例では、

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.4}$$

となる。先程の式に出てきた h_{11} は、

$$h_{11} = h_{ij} u^i u^j \tag{2.3.5}$$

だから、$\mathbf{h}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向への射影を取ったものであることが分かる。ここで、右辺は縮約を取っているから座標基底の取り方に依らない。抽象添字記法を用いれば $h_{ab} u^a u^b$ と書ける。$\boldsymbol{u}$ 方向で測った光の移動距離は

$$L_{\boldsymbol{u}} = L_0 \left(1 + \frac{1}{2} h_{ab} u^a u^b \right) \tag{2.3.6}$$

となる。干渉計のアームの方向をそれぞれ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ とおくと、検出器の出力 h は、検出器のアーム 2 方向へ飛んでいった光の飛行時間の差分を取って、ミンコフスキー時空での飛行時間で割ったものである。すなわち、

$$h = \frac{L_{\boldsymbol{u}} - L_{\boldsymbol{v}}}{L_0} \tag{2.3.7}$$

$$= h_{ab} \left(\frac{u^a u^b - v^a v^b}{2} \right) \tag{2.3.8}$$

である。検出器テンソル

$$d^{ab} := \frac{u^a u^b - v^a v^b}{2} \tag{2.3.9}$$

なるものを導入すれば、

$$h = h_{ab} d^{ab} \tag{2.3.10}$$

と書ける。

2.3.2 アンテナパターン関数

検出器テンソルの表式を変形することで、検出器の方向依存性を表すアンテナパターン関数を導くことができる。その議論のために、まず座標系を定義する。

重力波源から地球中心に向かう基底ベクトルを $\boldsymbol{k}$ とおく。

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.3.11}$$

そして、TT ゲージにおいて偏光モードを分離するように、すなわち

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ -h_\times & h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.12}$$

（$h_+, h_\times$ は遅延時間 $t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}/c$ の関数）となるように残りの基底 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を取る。抽象添字記法を使って

$$\begin{aligned} e_{+ab} &:= l_a l_b - m_a m_b \\ e_{\times ab} &:= l_a m_b + m_a l_b \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

というテンソルを定義すると、計量の変化は

$$h_{ab} = h_+ e_{+ab} + h_\times e_{\times ab} \tag{2.3.14}$$

のように表せる。

しかしながら、この基底の取り方は重力波源の様子が分かっていないとできないやり方である。そこで、重力波源の詳細に依らないもう 1 つの座標系の取り方を考える。赤道座標系で、重力波源が (α, δ) の位置にあるものとする。$\boldsymbol{k}$ はそのままに、重力波源の赤経 α が減少する方向に単位ベクトル $\boldsymbol{i}$ を取り、$\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}$ を残りの基底とする。こうすると天球面に沿った座標系が取れる（図 2.6 参照)。

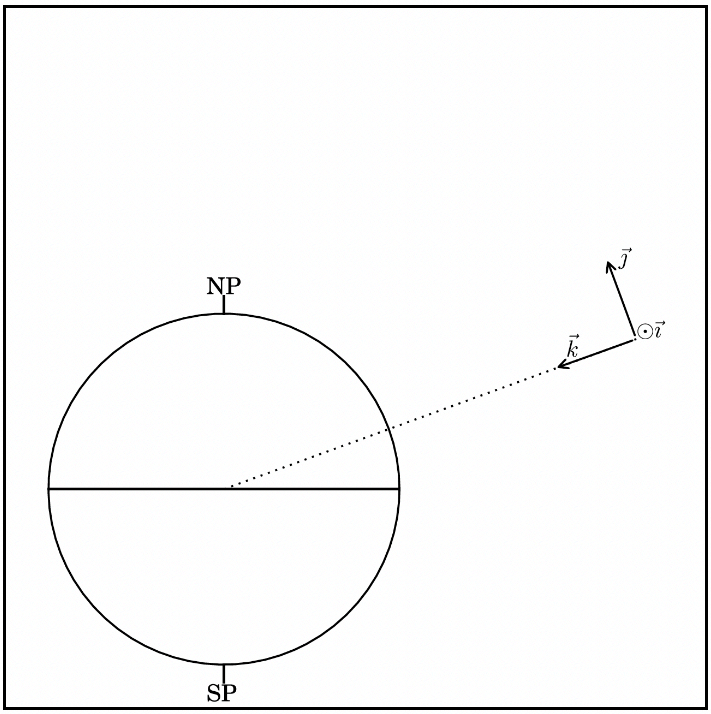


図 2.6　天球面に沿った座標系の取り方。NP は地球の北極、SP は南極を示す。[33] より引用。

$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ 座標系を $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k})$ 座標系に合わせるには、天球面上である角度 ψ だけ回転させる必要がある。これは重力波の偏光角（polarization angle)*13 と呼ばれるものであり、天球面上の回転自由度に由来するものである。パラメータ推定の際にもこれを考慮する必要がある。

基底の変換則は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l} &= \boldsymbol{i}\cos\psi + \boldsymbol{j}\sin\psi \\ \boldsymbol{m} &= -\boldsymbol{i}\sin\psi + \boldsymbol{j}\cos\psi \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

*13 偏光角の範囲は、$0 \le \psi < \pi$ を考えれば十分である。(2.3.15) により、偏光角を $\psi \to \psi + \pi$ だけ動かすことは、基底の反転に対応する。つまり $\boldsymbol{l} \to -\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m} \to -\boldsymbol{m}$ という変更を受けるが、こうしても物理的な記述は一切変わらない。

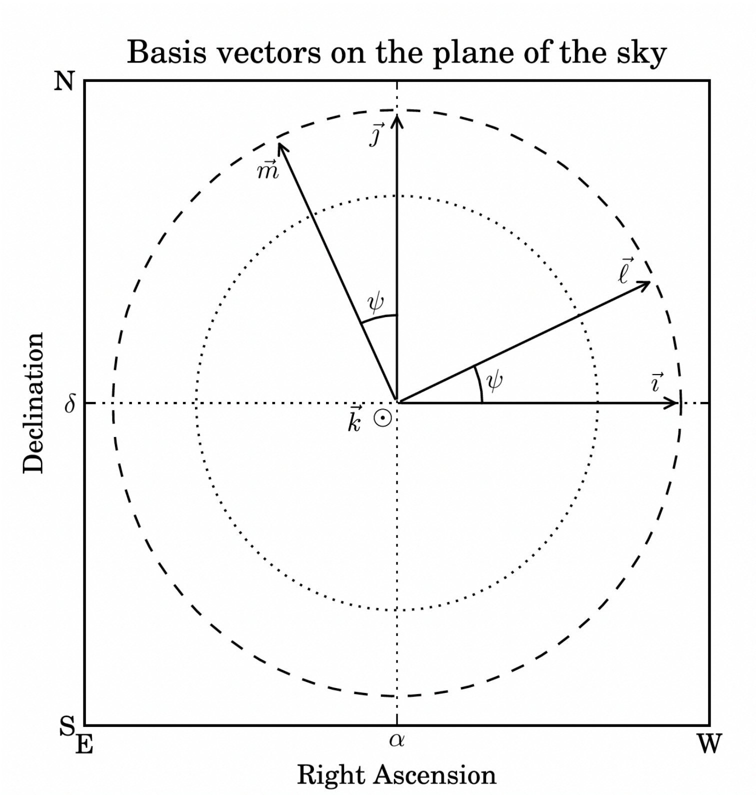


図 2.7　偏光角の図示。観測者から重力波源の方向に天球面を見た構図になっている。[33] より引用。

である。式 (2.3.15) 同様に、次のようなテンソルを構成しておく。

$$\begin{aligned} \epsilon_{+ab} &:= i_a i_b - j_a j_b \\ \epsilon_{\times ab} &:= i_a j_b + j_a i_b \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

式 (2.3.10) に式 (2.3.14) を代入すると

$$h = (h_+ e_{+ab} + h_\times e_{\times ab}) d^{ab} = h_+ F_+ + h_\times F_\times \tag{2.3.17}$$

となる。ここで導入した、

$$\begin{aligned} F_+ &= e_{+ab} d^{ab} \\ F_\times &= e_{\times ab} d^{ab} \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

がアンテナパターン関数と呼ばれるものである。式 (2.3.13) と (2.3.16)、(2.3.15) より、

$$\begin{aligned} e_{+ab} &= \epsilon_{+ab} \cos 2\psi + \epsilon_{\times ab} \sin 2\psi \\ e_{\times ab} &= -\epsilon_{+ab} \sin 2\psi + \epsilon_{\times ab} \cos 2\psi \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

だから、これを式 (2.3.18) に代入すると

$$\begin{aligned} F_+(\alpha, \delta, \psi) &= a(\alpha, \delta) \cos 2\psi + b(\alpha, \delta) \sin 2\psi \\ F_\times(\alpha, \delta, \psi) &= -a(\alpha, \delta) \sin 2\psi + b(\alpha, \delta) \cos 2\psi \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

$$
\begin{aligned}
a(\alpha,\delta) &:= \epsilon_{+ab} d^{ab} \\
b(\alpha,\delta) &:= \epsilon_{\times ab} d^{ab}
\end{aligned}
\tag{2.3.21}
$$

を得る。$a(\alpha,\delta), b(\alpha,\delta)$ は検出器の具体的なセットアップに依存し、使用する検出器に合わせて都度計算する必要がある。

ここで、腕が黄道面上にあって、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ がそれぞれ春分点（赤経 0 時）と夏至点（赤経 9 時）の方向を指すような仮想的な地上重力波望遠鏡のセットアップを考える（図 2.8）。このとき、$a(\alpha,\delta), b(\alpha,\delta)$ は以下のように

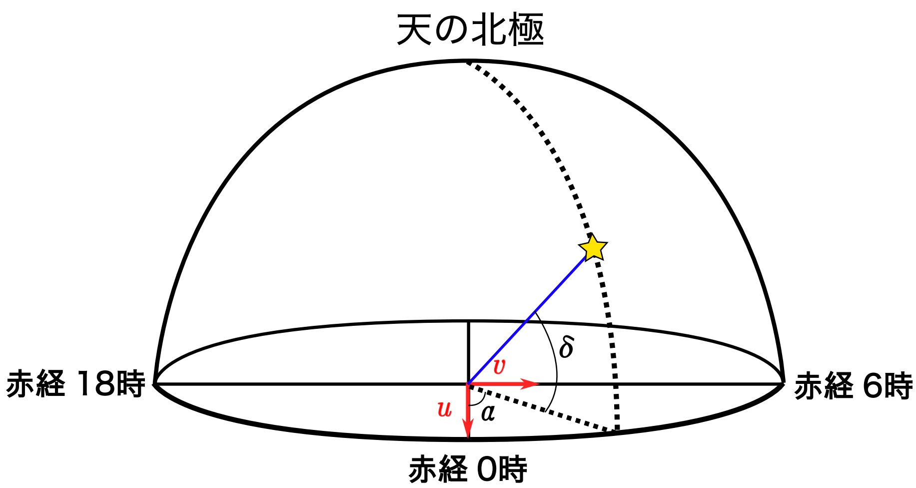


図 2.8

書かれる。

$$
a(\alpha,\delta) = \frac{1}{2}\left[1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right]\cos 2\alpha \tag{2.3.22}
$$

$$
b(\alpha,\delta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin 2\alpha \tag{2.3.23}
$$

アンテナパターン関数は

$$
F_+(\alpha,\delta,\psi) = \frac{1}{2}\left[1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right]\cos 2\alpha\cos 2\psi + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin 2\alpha \sin 2\psi \tag{2.3.24}
$$

$$
F_\times(\alpha,\delta,\psi) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin 2\alpha\sin 2\psi + \frac{1}{2}\left[1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right]\cos 2\alpha\cos 2\psi \tag{2.3.25}
$$

となる。最も単純な場合として、偏光角 $\psi = 0$ で検出器に真上から入射してくるとき（$\delta = \pi/2, \alpha = 0$）を考えると $F_+ = 1, F_\times = 0$ という値を得る。つまり、この状況ではプラスモードだけを考えればよい。

2.3.3　現在稼働中の重力波望遠鏡

ここでは、現在運用中の重力波望遠鏡（検出器）について述べる。現在稼働中の重力波望遠鏡は全て地球上にあり、その配置は図 2.9 に示す通りである。このようにして複数台の検出器を連携させたネットワークを構築するのには理由がある。1 つには、複数台のデータで相関を取り、検出された信号の有意性を高めるためである。地面振動や熱雑音といったノイズは、それぞれの検出器で現れるものであり、別々の場所で相関があることはない。検出器ネットワークの中でデータを比較すれば、地球に到来した重力波信号だけが全ての検出器

に現れる筈であり、これは観測した信号の統計的な有意性を高めることに繋がる。もう 1 つは、重力波観測の指向性の弱さにある。重力波観測は、1 台の望遠鏡ではそもそも原理的に到来方向を知ることはできない。2 台使うと、重力波の到来時間差によってある程度方向を知ることはできるが、精度は良くない[*14]。3 台以上の運用になって初めて三角測量による天球面上の重力波源位置の特定ができるようになる。天球面の上の位置の特定は、重力波源の電磁波追観測にとって重要であり、マルチメッセンジャー天文学（2.5 節参照）の確立に欠かせない。

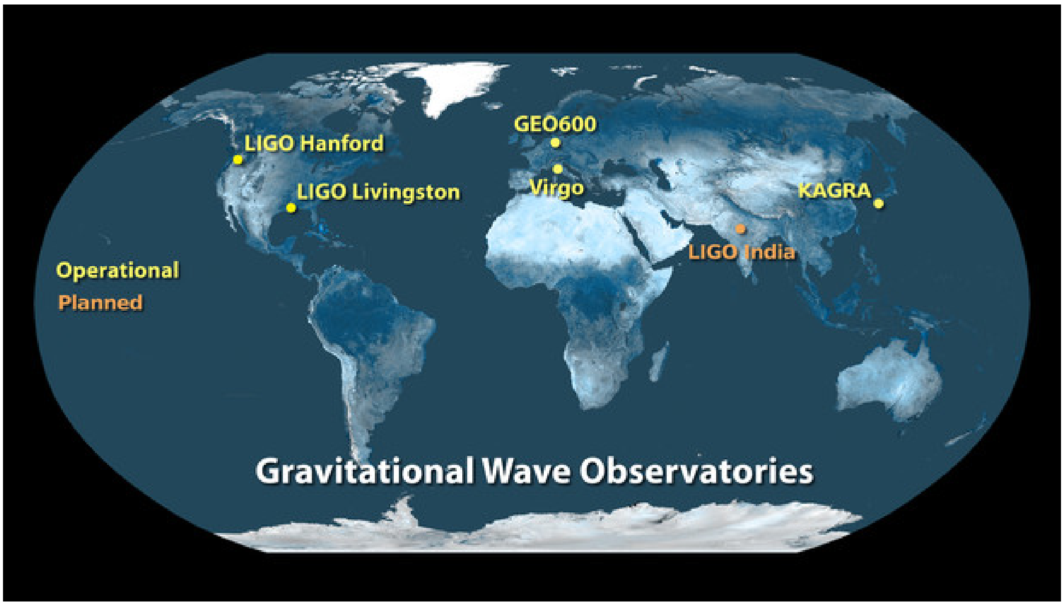


図 2.9　地上に存在または建設中の重力波観測施設の位置 [34]

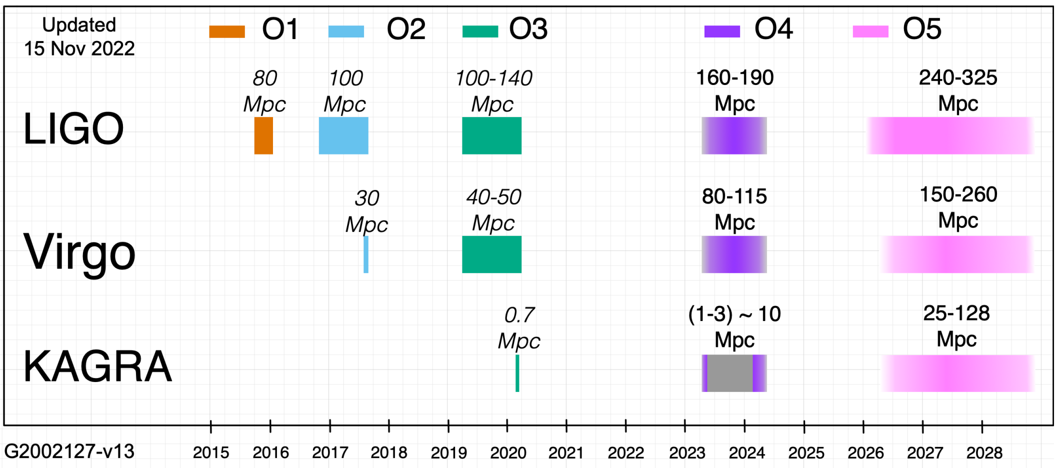


図 2.10　現在進行中の重力波観測計画の予定。O1,O2,…は観測運用（Observation Run）期間を表す [35]

[*14] 現に GW150914 を始めとした初期の重力波観測では、Virgo が信号を検出できなかったため、LIGO2 台のみで到来方向の推定を行っていた。

2.3.3.1 LIGO

LIGO（Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory）は、アメリカのワシントン州ハンフォード（Hanford）とルイジアナ州リビングストン（Livingston）に設置されている重力波検出器である。LIGO 科学コラボレーション（LSC: LIGO Scientific Collaboration）によって運用されている。リビングストンとハンフォードの観測所は約 3000km 離れていて、両観測所は現時点でそれぞれ 4km の腕を持つレーザー干渉計を備えたほぼ同じ構成になっている。

初期型の LIGO は 2002 年に運用を開始し 2010 年まで稼働した。しかし、初期型は性能評価のための科学運用（Science Run）を全 5 回行うも重力波の観測を実現できなかった。その後 Enhanced LIGO と呼ばれるアップグレード版も建設されるが、重力波観測は叶わなかった。

2015 年 9 月に初期型に比べ大幅に性能を向上させた Advanced LIGO [36] が稼働し、観測運用（Observation Run）を開始、その直後に後述の GW150914 を観測した。



図 2.11　LIGO の外観。左がハンフォード、右がリビングストン [37]

2.3.3.2 Virgo

Virgo は、イタリアのトスカーナ州カシーナ（Cascina）にある重力波検出器である。ヨーロッパ諸国を中心とした Virgo コラボレーション（Virgo Collaboration）によって運用されている。名前の由来は、地球から約 20Mpc 離れたおとめ座銀河団（Virgo cluster）であり、数十–数百 Mpc の範囲内で起きる連星合体や超新星爆発の重力波をとらえることを目的としている。干渉計の腕の長さは LIGO より少し短い 3km である。

こちらも LIGO 同様、2017 年に Advanced Virgo として大幅なアップグレードを遂げ、稼働直後に GW170817 の観測に貢献した。LIGO の 2 台体制では、到来方向の推定精度が不十分であった。しかし、GW170817 では Advanced Virgo が加わったことで連星中性子星合体の位置を約 30 平方度の精度で決定でき、その甲斐もあってその後の電磁波追観測に繋げられた（詳しくは 2.3.4.2 目参照）。



図 2.12　Virgo [38]

2.3.3.3　KAGRA

KAGRA は、日本の重力波検出器である。岐阜県飛騨市神岡の旧神岡鉱山跡地を利用して建設された。干渉計の腕の長さは Virgo と同じ 3km である。

前述の LIGO や Virgo に無い KAGRA の最大の特徴は、地中にあることと、低温技術の応用である。KAGRA は、旧神岡鉱山の地下に建設されており、これによって地面振動によるノイズを軽減できるとされている。また、主要な雑音源の 1 つである熱雑音を抑えるために熱伝導度の高いサファイア製の反射鏡を 20K 程度まで冷却して使用している（LIGO や Virgo の反射鏡は石英ガラス製であり、冷却はしていない）。

2.3.3.4　その他

その他にも、TAMA300（日本）や GEO600（ドイツ）という重力波検出器が稼働中である。これらの検出器と初期型の LIGO と Virgo は第 1 世代検出器と呼ばれ、それに対して Advanced LIGO と Advanced Virgo、KAGRA、そして後述する LIGO India は第 2 世代検出器と呼ばれている。

2.3.4　今まで観測された重力波イベント

本項では、実際に観測された重力波イベントの中でも、特に意義深いとされるものについて述べる。観測が確認された重力波は、頭に GW を付けた上で観測した日付で呼ばれている。初期の観測では年＋月＋日という規則で命名されていた（例えば GW150914 は 2015 年 9 月 14 日に観測された）。しかし近年では同日中に複数の重力波が見つかるようになったため、GWTC-2 [4] 以降では名前に時間を追加して、名前をより簡単に区別できるようしている（例えば、GW200208_222617 は 2020 年 2 月 8 日の 22:26:17UTC に観測されたものである）。

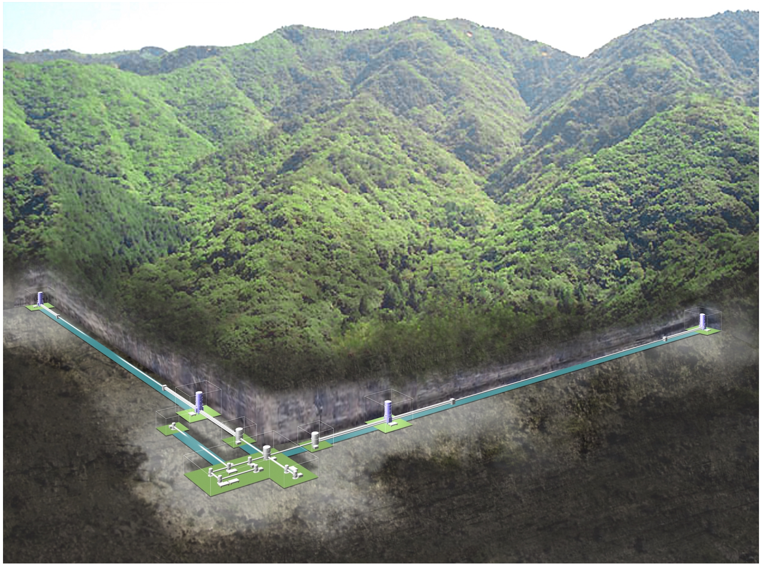


図 2.13　KAGRA の俯瞰図 ©ICRR [39]

2.3.4.1　GW150914

GW150914 は、人類史上初めて直接観測された重力波である。2015 年 9 月 14 日に観測された [2]。GW150914 は初めてのブラックホール直接観測であり、初めてのブラックホール連星合体の観測事例でもある。GW150914 の観測によって、LIGO 計画で主導的な役割を務めたレイナー・ワイス（Rainer Weiss)、バリー・バリッシュ（Barry Barish)、 キップ・ソーン（Kip Thorne) の 3 人は 2017 年ノーベル物理学賞の栄誉に浴した[*15]。

2.3.4.2　GW170817

GW170817 [26] は、2015 年 9 月 14 日に観測された連星中性子星合体から出た重力波である。これは連星中性子星合体の初観測事例である。特筆すべき点は、重力波と電磁波の共同観測によって、r 過程とキロノヴァ、そしてショートガンマ線バーストの原理の解明へと大きく前進したことである。

恒星進化の熱核融合では、鉄より重い元素を作ることはできない。鉄より重い元素を合成するには、原子核が中性子を獲得し、核子を増やす中性子捕獲（neutron capture）反応が必要になってくる。中性子捕獲によって重い元素を作るとき、中性子捕獲と、原子番号を増やすため中性子のベータ崩壊が組み合わさって起こる。中性子捕獲による重元素合成は、その 2 つの反応のタイムスケールで 2 種類のパターンが考えられ、中性子捕獲がベータ崩壊に比べて遅く進行する場合を s 過程（s-process）と呼び、中性子捕獲がベータ崩壊に比べて早く進行する場合を r 過程（r-process）と呼ぶ。r 過程が起きるには、中性子が豊富に存在する爆発的現象が必要であり、従来、中性子星を生成する重力崩壊型超新星爆発と中性子星の連星合体がその候補と目されてきた。そして、r 過程にはキロノヴァ（kilonova）と呼ばれる爆発現象が伴う。キロノヴァとは、r 過程によって合成された放射性重元素の崩壊熱によって光って見える現象のことで、新星の 1000 倍程度の明るさになる

[*15] 受賞理由の功績から 2 年ほどで授与されるというのは驚異的なスピードである。このことから、重力波の直接観測がどれほど待望されていたのかが窺い知れる。

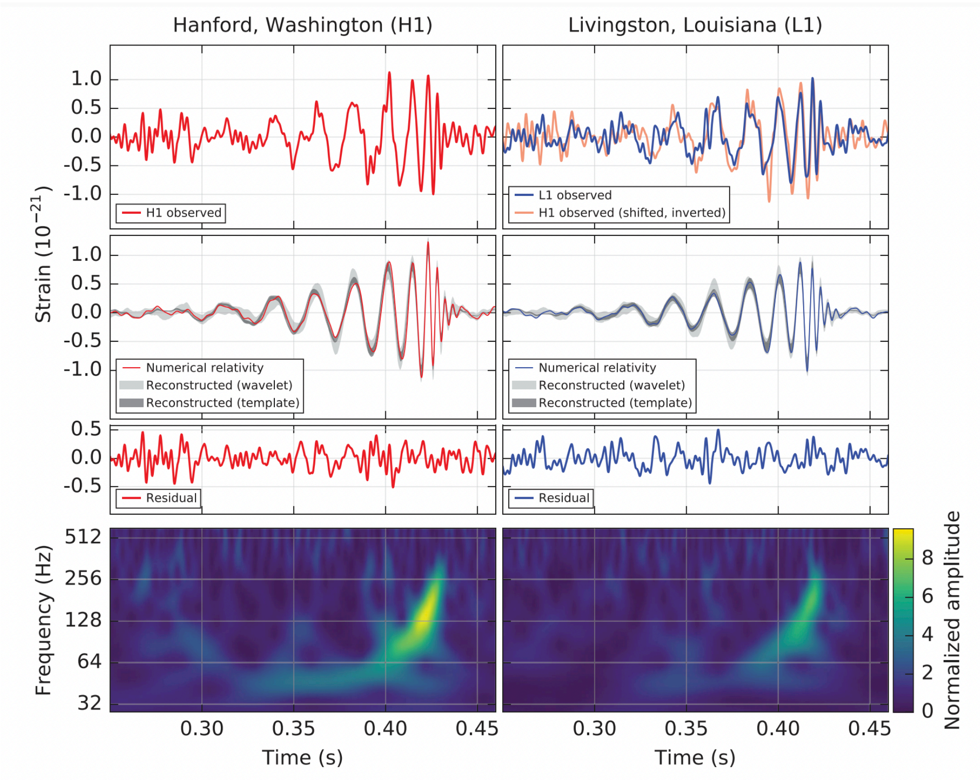


図 2.14　GW150914 の波形とスペクトログラム。左側がハンフォード、右側がリビングストンで観測されたデータである。[2]

ことからその名が付けられた。

ショートガンマ線バーストは、ガンマ線バーストの中でもバーストが 2 秒程度以下の継続時間を持つものを指す。連星中性子星が合体すると、中心にブラックホールまたは中性子星ができ、周りに撒かれた物質が降着円盤を形成する。その降着円盤が中心天体に一気に落ち込み重力ポテンシャルエネルギーを解放することで、極短い時間でのエネルギー放出を行うとされている。

電磁波追観測が幅広い波長について行われ、一連の報告 [40–43] がなされた。それによれば、対応するガンマ線バースト GRB 170817A [44] が発見されたこと、中性子星連星合体にキロノヴァが伴うことが確認された。この観測によって、連星中性子星合体が r 過程とガンマ線バーストの起源である裏付けが取れたとされている。

2.3.4.3　GW190521

GW190521 は、2019 年 5 月 21 日に観測された重力波イベントである [45]。ブラックホールの質量ギャップに位置付けられる質量のブラックホールの連星合体によって生じたとされている。

非常に大きな、高温の星では、星中心部の核融合によって生じた光子による輻射圧で星の外層の重力を支えている。しかし、130–140$M_\odot$ を超える星ではあまりに高温であるため、光子が電子-陽電子対生成を起こすようになり、光子の輻射圧が減少する。こうなると重力への支えがなくなった不安定な状態となり、この不安定性は対不安定性（pair-instability）と呼ばれている。この状態になると、外層が恒星の核を圧縮・加熱し、対

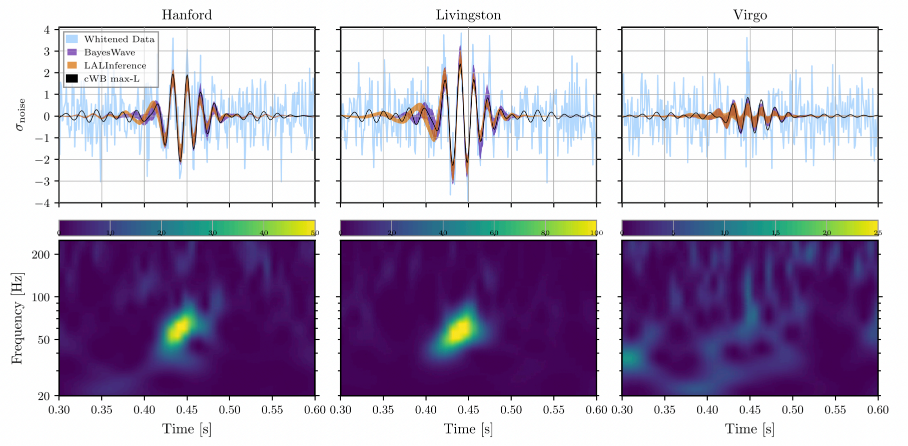


図 2.15　GW190521 の波形とスペクトログラム [45]

生成と対消滅によるエネルギー生成が促され恒星内部の温度が上昇、それがまた対生成を促すというフィードバックが働くようになる。こうしてエネルギーが蓄えられ、超新星爆発を起こすと、この爆発は残骸を残さないと考えられている。このような過程を経た超新星のことを対不安定型超新星（PISN:pair-instability supernova）と呼ぶ [46, 47]。なお、100–130$M_\odot$ の星では脈動対不安定性超新星（pulsational pair-instability supernova）[48, 49] と呼ばれる状態に変化する。基本的な機構は PISN と変わらないが、こちらは星全体を吹き飛ばすほどではない。脈動によって質量放出が行われ、元の恒星ほどの質量は無くなってしまう。また、250$M_\odot$ を超えるようなあまりに重い星であると、爆発を抑え込んでそのまま重力崩壊を起こし、ブラックホールが出来る。以上のことをまとめると、130–250$M_\odot$ の星は重力崩壊によってブラックホールを作らないため、生成が困難なブラックホールの質量レンジが存在することになる。これはブラックホールの質量ギャップ（mass gap）と呼ばれ、およそ 50–150$M_\odot$ に対応している。

GW190521 のブラックホールの質量はそれぞれ、$85^{+21}_{-14}M_\odot$ と $66^{+17}_{-18}M_\odot$ とされ、合体によって生じたブラックホールの質量は $142^{+28}_{-16}M_\odot$ と推定された。およそ $10^2 - 10^5 M_\odot$ オーダーの質量を持つブラックホールは、中間質量ブラックホールと呼ばれ、観測による存在確認が乏しかった。そのため、GW190521 は「質量ギャップに位置するブラックホールが合体して中間質量ブラックホールを生成する」という極めて珍しいイベントであり、驚きをもって迎えられたのだった。

また GW190521 には、付随する可能性があるとされている電磁波対応天体が観測された [50] という報告がある。ブラックホール連星合体は電磁波を放出しないため、電磁波対応天体の発見が報告されるのは異例のことである。天球面上の位置の不確定性が大きいため、この報告は確実に支持されている訳ではないが、関係があった場合には通常の連星ブラックホール合体と異なるプロセスが働いていることになる。

2.3.4.4　その他

ここまでブラックホール同士、或いは中性子星同士のイベントだけ紹介してきたが、双方が連星合体する場合も考えることはでき、実際に観測事例が報告されている。GW190426_152155 は中性子星とブラックホールの合体イベントによるものである可能性がある [51] が、信号が非常に弱く確実なことは言えない。初の明確な中性子星-ブラックホール連星合体イベントとして認識されているのは、GW200105 と GW200115 である。

2.3.5　今後予定されている観測計画

これから稼働が計画されている重力波望遠鏡としては、まず LIGO India がある。そして来るべき次世代の重力波望遠鏡・第 3 世代検出器として、さらに基線長（アーム長）を伸ばした重力波観測計画が幾つも提案されている。基線長を長くすることで、第 2 世代では見えなかった遠方宇宙からの重力波（赤方偏移によって波長が伸びてしまうため、周波数が低い）の観測が期待できる。

2.3.5.1　LIGO India

LIGO India [52] は、現在インドに建設中の重力波望遠鏡である。完成すれば LIGO、Virgo、KAGRA に次ぐ 5 台目の第 2 世代検出器として、地上重力波観測ネットワークに加わることが期待されている。当初の計画から大幅に遅れが生じており、稼働開始時期は見通せていない。

2.3.5.2　LISA

LISA（Laser Interferometer Space Antenna）[53] は、欧州宇宙機関（ESA:European Space Agency）主導で進められている宇宙重力波望遠鏡計画である。原理自体は地上型と同じで、一辺が 250 万 km の正三角形を成すように投入された 3 機の衛星が、太陽周回軌道を三角形を保ったまま公転し、それらが巨大なレーザー干渉計として重力波を捉える。

宇宙空間での観測を行う利点は、地面振動によるノイズが無い点、地上では到底実現し得ない基線長を実現できる点などが挙げられる。まず、地面振動による雑音は f^{-2} に比例して増加すると言われており、それが特に強く寄与する 10Hz 以下の低周波帯域には地上検出器では太刀打ちできない。地面振動が無い宇宙空間でレーザー干渉計を構築できれば、低周波領域での重力波探索が可能になるのである。また、低周波（長波長）領域を狙うには、それに合わせて検出器の基線長を長くしなければならないが、その点においても宇宙空間は都合が良い。

LISA が主に狙う帯域は 1-10mHz である。この帯域で期待される重力波源は連星 SMBH（Super-massive black hole、超大質量ブラックホール）の合体や SMBH に恒星クラスの天体が落ち込んでいく現象・EMRI (Extreme mass-ratio inspiral)、銀河系内の連星白色矮星合体などがある。

実証実験として 2015 年に LISA パスファインダー（LISA Pathfinder) [54] が打ち上げられ、それが成功を収めたため正式にプロジェクトとして認定、現在は 2034 年の正式運用開始を目指している。

2.3.5.3　DECIGO

DECIGO（Deci-hertz Interferometer Gravitational wave Observatory）[55] は、日本が主体となって計画する宇宙重力波望遠鏡である。観測の仕組みは本質的に LISA と変わらないが、大きく違う点は基線長が 1000km と LISA に比べると短いことである。これはその名が示す通り、DECIGO が 0.1-10Hz 帯の重力波をターゲットとしているからである。地上重力波望遠鏡は 10Hz 以下の帯域の観測に弱く、LISA はその基線長の長さから却って 0.1Hz 以上の帯域を拾いにくい。DECIGO はその間を埋めるような観測計画である。

2.3.5.4　その他

その他構想・提案段階にある重力波観測計画として、Advanced LIGO の 10 倍の基線長 40km を誇る Cosmic Explorer [57]、KAGRA のように地下に建設されながら 10km を持つ重力波望遠鏡 Einstein Telescope [58]、

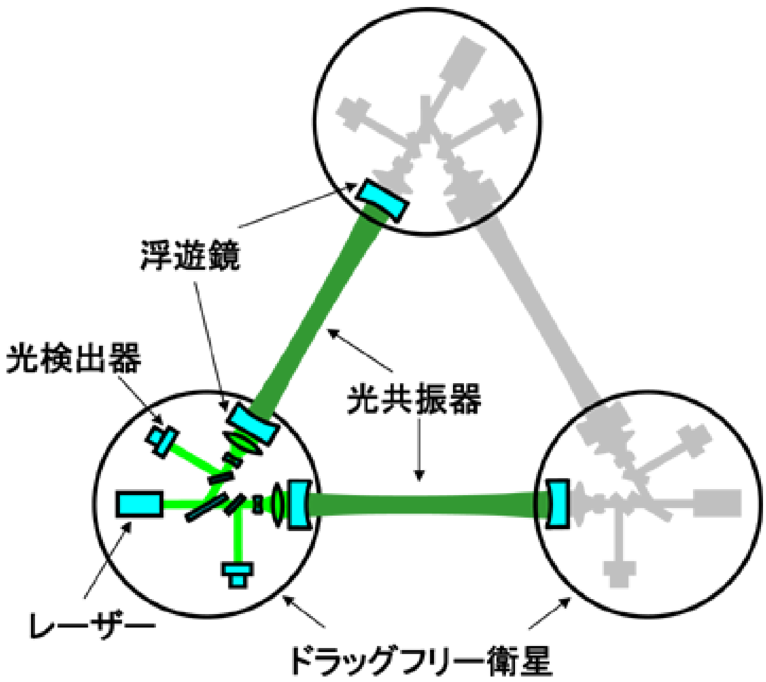


図 2.16　DECIGO の概念図。ドラッグフリー（dragfree）とは、太陽風や太陽の輻射圧による衛星の加速を打ち消し、重力だけが実効的に働くようになっている状態のことを指し、宇宙重力波望遠鏡にはフィードバック制御によってドラッグフリーを保つ機構が必要になる。[56]

LISA の後継機 Big Bang Observer（BBO）[59]、中国が計画する宇宙重力波望遠鏡・天琴 [60] などが挙げられる。

2.4　解析計算・数値計算

ここまで、一般相対論や重力波についての基礎部分を述べてきた。しかし重力波を捉えるには、現実にある複雑な系を考え、計算を実行してどのような波形が出てくるかを知らなければならない。次章で説明する、マッチドフィルター法による重力波探索では、あらかじめ重力波波形のテンプレートが必要になるからである。ただ、このことは全くもって簡単ではない。その原因はアインシュタイン方程式が非線形偏微分方程式であり、強い対称性があるような特殊な状況を除いては解析的に解くことは不可能だからである。そこで、アインシュタイン方程式を近似的に解いたり、数値計算を実行するための種々の手法が編み出され、長い年月の研究の中で発展してきた。一般相対論の近似計算や数値計算は一大分野となっているため、ここでは概観するに留める。

2.4.1　ポスト・ニュートン近似

重力波源の典型的な速度 v が高々光速の数十%程度の場合には、ポスト・ニュートン近似 (post - Newtonian approximation) と呼ばれる近似法が有効である。この近似は、アインシュタイン方程式や運動方程式を $GM/c^2r \sim v^2/c^2$ の冪で展開し、低次の項から逐次求めていく手法である。ニュートン重力は光速を $c \to \infty$ に取った理論と見ることができる。ポスト・ニュートン近似は、c が有限であるために現れる寄与を取

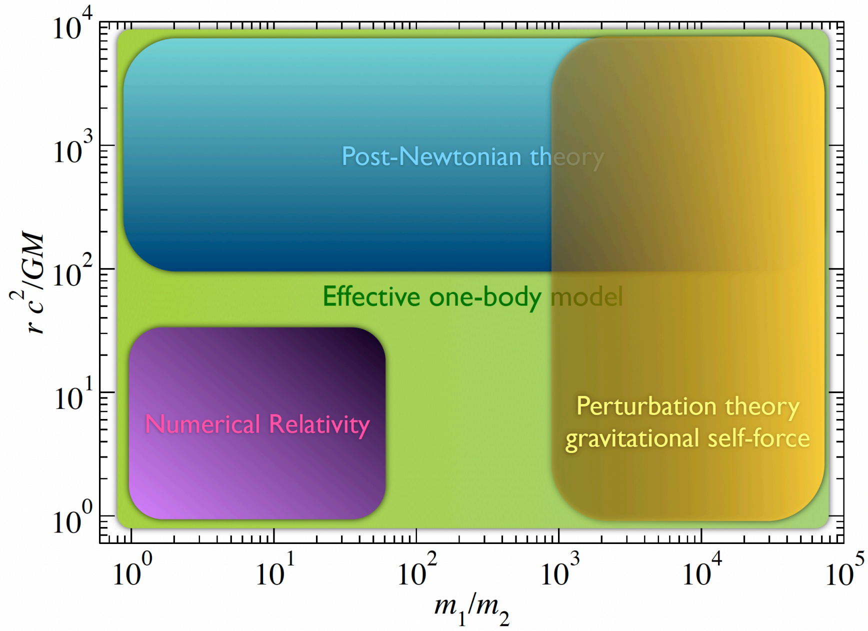


図 2.17　一般相対論の二体問題を解く上で、主な解析的手法と数値的手法が有効であるとされるパラメータの範囲 [61]

り込んで、ニュートン重力を超越していくことからこの名前が付けられた。PN 近似では $(v/c)^2$ を 1 次として捉え、$(v/c)^n$ までの展開を $n/2$PN と呼ぶ。例えば、$(v/c)^3$ まで展開した PN 近似は 1.5PN と呼ばれる。発想自体は単純であるものの、高次の計算を実行するには困難が伴うため、PN 計算には様々な手法が考えられている。有効場の理論の文脈から、ファインマン・ダイアグラムを使って PN 近似計算を行うやり方もある [62, 63]。

PN 近似による計算を行うと、PN オーダーが高次になるにつれニュートン重力には無い豊かな効果が現れてくる。例として、コンパクト連星合体を 2PN オーダーまで考えると、軌道角運動量とスピン角運動量が相互作用し、軌道面が歳差する効果が現れる [64]。軌道角運動量を $\vec{L}$、スピン角運動量を $\vec{S}_1, \vec{S}_2$、質量比を $q = m_2/m_1 \geq 1$、$A_1 = 2 + 3q/2, A_2 = 2 + 3/(2q)$ とする。軌道角運動量の時間変化は

$$\dot{\vec{L}} = \frac{L}{r^3}\left[\left(2 + \frac{3q}{2}\right)\vec{S}_1 + \left(2 + \frac{3}{2q}\right)\vec{S}_2\right] \times \hat{L} \tag{2.4.1}$$

$$\equiv \frac{L}{r^3}\left[A_1\vec{S}_{1\perp} + A_2\vec{S}_{2\perp}\right] \times \hat{L} \tag{2.4.2}$$

$\perp$ は軌道面に直交する成分を表す。有効歳差スピン（effective precession spin）χ_p [65] を定義して歳差の大きさを評価することが多い。

$$\chi_p := \frac{\max(A_1 S_{1\perp}, A_2 S_{2\perp})}{A_2 m_2^2} \tag{2.4.3}$$

2.4.2　ブラックホール摂動

ブラックホールの連星系を考える際に、質量比が著しく偏っている場合は軽い方の天体の質量を無視し、試験粒子として扱うことができる。このとき、ブラックホールの周りを運動する試験粒子は、背景時空で決まる

測地線の上を動く。ブラックホール摂動（Black hole perturbation）とは、この考え方を応用し重いブラックホールが作る背景時空に軽い天体が摂動を加えていると考え、質量比 $q = m/M$ を展開パラメータとして摂動展開を行う理論である。具体的には、式 (2.1.15) でやったような計量の展開において、背景時空をブラックホール解 $g_{\mu\nu}^{\rm BH}$ に取り、

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\rm BH} + h_{\mu\nu} \tag{2.4.4}$$

とした線形摂動 $h_{\mu\nu}$ の振る舞いを調べる。

2.4.3　数値相対論

上で述べたような近似計算は、適切なパラメタ－の範囲内で有効である。しかし、ブラックホールの合体の瞬間といった極限の状況では近似が適応できない場合もあり、そのような状況に対処するには、数値解析的なアプローチを用いる他ない。数値相対論（numerical relativity）は、アインシュタイン方程式を数値計算によって解くことを目指す一連の手法を指す。

代表的な手法に、BSSN 形式（Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura formalism）[66, 67] と呼ばれる定式化がある。まず、初期値を与えたアインシュタイン方程式の「時間」発展を考えるため、時間と空間が渾然一体となった時空ではなく、時間軸と 3 次元空間に分けてやる必要がある。これは、大局的双曲時空 $\mathcal{M}$*16であれば可能である。$\mathcal{M}$ のコーシー面として 3 次元超曲面 Σ を考えると、$\mathcal{M}$ のトポロジーを $\mathbb{R}\times\Sigma$ と分解できる（ [8] の定理 8.3.14 を参照)。この作業を ADM(Arnowitt-Deser-Misner) 分解*17や 3 + 1 分解という。一定の条件の下で、時刻 t によって時空 $\mathcal{M}$ を葉層化することができる。

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \Sigma_t \tag{2.4.5}$$

初期時刻を t_0 として、空間的超曲面 Σ_{t_0} の単位法線ベクトルを n^μ とする（すなわち、n^μ は時間方向を向いており、$n_\mu n^\mu = -1$)。n^μ には自由度があり、$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha)$ のように書くことができる。α, β^i はそれぞれラプス関数（lapse function)、シフトベクトル（shift vector）と呼ばれる。3 次元超曲面 Σ_{t_0} の計量を γ_{ij} とすると、計量は次のように分解できる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu && (2.4.6)\\ &= -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) && (2.4.7)\\ & && (2.4.8) \end{aligned}$$

成分表示すると

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\alpha^2 + \gamma_{ij}\beta^i\beta^j && (2.4.9)\\ g_{0i} &= \gamma_{ij}\beta^j && (2.4.10)\\ g_{ij} &= \gamma_{ij} && (2.4.11) \end{aligned}$$

となる。ここから $n_\mu = (-\alpha, 0)$ が言える。この定式化の下では 10 成分の $g_{\mu\nu}$ が、6 成分の γ_{ij}、1 成分の α、3 成分の β^i に分割されたことが分かる。後の方の 4 成分はゲージ自由度に対応する。なお γ_{ij} は射影演算子

*16 大局的双曲時空（globally hyperbolic spacetime）とは、コーシー面を持つ時空のことである。コーシー面（Cauchy surface）とは、その超曲面から因果的に繋がっている部分が時空全体を覆い尽くすような超曲面のことである。詳細な議論は [8] を参照。

*17 元々は量子重力理論の文脈で、一般相対論にハミルトン形式を導入するために考案されたものである。今回紹介する (γ_{ij}, K_{ij}) を基本とする定式化 [68] は数値相対論でよく使われるものである。

テンソルの一部として捉えることもできる。一般論として、ベクトル n_μ に垂直な超平面への射影演算子テンソルは

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \tag{2.4.12}$$

と書けるが、$n_i = 0$ だから $\gamma_{\mu\nu}$ の空間成分は 3 次元計量 γ_{ij} に帰着する。3 次元計量 γ_{ij} での記述に落とし込むために $D_i\gamma_{jk} = 0$ を満たすような 3 次元共変微分 D_i を定義して、アインシュタイン方程式を書き換える。そのために外的曲率（extrinsic curvature）という概念が使われる。3 次元超曲面の、4 次元時空への埋め込まれ方を表す外的曲率 K_{ij} は、リー微分（Lie derivative）$\pounds$ を用いて

$$K_{ij} := -\frac{1}{2}\pounds_n \gamma_{ij} = -\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu \nabla_\mu n_\nu \tag{2.4.13}$$

のように定義される。定義から分かるように、この K_{ij} は γ_{ij} の「速度」のような量である。この (γ_{ij}, K_{ij}) の組の時間発展を追うことができれば、目的は達成される。まず、γ_{ij} の時間発展は式 (2.4.13) から

$$\dot{\gamma_{ij}} = -2\alpha K_{ij} + D_i\beta_j + D_j\beta_i \tag{2.4.14}$$

と導かれる。次に K_{ij} の時間発展方程式を導出するには、以下のようにアインシュタイン方程式の射影を取ることを考える。

$$G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \tag{2.4.15}$$

$$G_{\mu\nu}n^\mu \gamma^\nu{}_i = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} n^\mu \gamma^\nu{}_i \tag{2.4.16}$$

$$G_{\mu\nu}\gamma^\mu{}_i \gamma^\nu{}_j = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \gamma^\mu{}_i \gamma^\nu{}_j \tag{2.4.17}$$

このうち、(2.4.15) と (2.4.16) は拘束条件であり、(2.4.17) から K_{ij} の時間発展を記述する式が得られる。拘束条件は初期状態で満たされていればその後も満たされるから、最初に拘束条件を解いて、(γ_{ij}, K_{ij}) の発展を追うのが素朴な ADM 形式による数値相対論である。

しかし、この定式化でもある程度は有用であるが、コンパクト連星合体による重力波発生の計算のような強重力場を長時間発展させる状況になると、数値的な計算誤差によって拘束条件から外れていき破綻が生じてしまう。そこで考案されたのが BSSN 形式である。BSSN 形式では、変数 (γ_{ij}, K_{ij}) を巧みに組み換えることで、安定的な計算を実現している。詳細は [69] などを参照されたい。

2.5 マルチメッセンジャー天文学との関わり

マルチメッセンジャー天文学とは、1 つの天体現象を電磁波やニュートリノ、そして重力波といった複数の観測手段によって多角的に捉え、その観測結果を総合することで今まで見えてこなかった天体現象の機構を明らかにしようとする天文学のことである [70]。

マルチメッセンジャー天文学がターゲットとする現象は、

- 連星中性子星の合体
- 超新星爆発
- ブレーザー（blazer）
- 潮汐破壊現象

などがある。その中でも、連星中性子星の合体によって生じたと考えられる重力波 GW170817 の観測 [26] では、対応するガンマ線バースト GRB 170817A [44] が発見された。これは重力波も含めたマルチメッセンジャー天文学の本格的な幕開けとされるイベントである。マルチメッセンジャー天文学による GW170817 の研究成果としては、一般相対性理論の検証 [71] が挙げられる。例えば、同一の発生源から出てきたことが分かっている電磁波と重力波は、その速さを比較することができる。もし、重力波の伝播速度が光速から有意にずれていた場合、重力理論に修正が必要になる。実際に GW170817 のデータを使った重力波の伝播速度の推定 [72] が行われており、重力波の速度は 10^{-15} の精度で光速であることが確かめられている。

第 3 章

重力波検出にまつわる解析手法

本章では、現在の重力波観測に用いられているデータ解析技術の基礎や専門用語について、本研究と関係ある CBC 検出の部分に絞って纏める。CBC 重力波の検出には、波形テンプレートを用意してこの章で説明するマッチドフィルターを利用した解析が有効である。マッチドフィルター法とは、3.4 節で説明する、入力データの中からテンプレートに一致する部分を取り出すための解析手法のことである。なお、本研究では 1 台の検出器のみ考えるので、複数台検出器に関する議論は行わない。

3.1 重力波波形テンプレート

マッチドフィルター解析には、波形のテンプレートを用意する必要がある。テンプレートは周波数領域で作成されることが多い。周波数領域における重力波波形テンプレートは一般に、パラメータの組 $\boldsymbol{\lambda}$ を使って

$$\tilde{h}(f;\boldsymbol{\lambda}) = A(f;\boldsymbol{\lambda})\exp(i\Phi(f;\boldsymbol{\lambda})) \tag{3.1.1}$$

の形で書くことができる。$A(f)$ の部分を振幅、$\Phi(f)$ の部分を重力波の位相と呼び、位相は重力波源に関する重要な情報を持つ。$\boldsymbol{\lambda}$ には、考える重力波源によって異なるパラメータが入るが、連星ブラックホールで考えるべきパラメータ[*1]は、

- 各ブラックホールの質量:m_1, m_2
- 各ブラックホールの無次元化角運動量 (スピン):$\boldsymbol{\chi_1}, \boldsymbol{\chi_2}$
  角運動量を $\boldsymbol{S}_i (i = 1, 2)$ とすると、無次元化角運動量は次のように定義される。

$$\boldsymbol{\chi_i} := \frac{c}{G}\frac{\boldsymbol{S}_i}{m_i^2} \quad (i = 1, 2) \tag{3.1.2}$$

- 重力波到来方向の赤経と赤緯:α, δ
- 観測者から波源までの距離:D
- 視線方向に対する傾角:ι
- 偏光角:ψ
- 合体時刻:t_{coal}
- 位相の定数部分:Φ_0

の 15 個ある。探索に当たっては、これらのパラメータについて最適化を行うことになる。

[*1] 中性子星合体の場合は、各中性子星の潮汐変形率も考慮する必要がある。

3.2　フーリエ変換

検出器から得られるデータは、各時刻に振幅が対応付けられた時系列データである。このようなデータにはフーリエ変換を施すことがしばしば有用である。時刻 t を変数として、連続的な時系列データ $x(t)$ に対して、そのフーリエ変換は、

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \tag{3.2.1}$$

である。逆フーリエ変換は、

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) e^{2\pi i f t} df \tag{3.2.2}$$

と定義する。

なお、実際の観測データは連続的でないので、離散フーリエ変換を考える必要がある。データに対して単位時間当たり f_s 回サンプリング（標本化）をして、連続的なデータを離散化する。このような状況下では、等時間間隔 $\Delta t = 1/f_s$ ごとにサンプリングが行われている、つまり離散的な時刻 $\{t_k \mid t_k = k\Delta t, k \in \mathbb{N}\}$ においてデータが定義されている。通常のフーリエ変換から離散フーリエ変換へと移行するために、次のように考える。まず、デルタ関数を一定の時間間隔ごとに並べた、

$$Ш_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \tag{3.2.3}$$

という関数を用意する。これは、グラフに書いたときの形状から櫛関数、またはキリル文字のШ (シャー) に擬えてШ関数と呼ばれるものである。

サンプリングを行った上でフーリエ変換を行うことは、フーリエ変換に櫛関数を挿入することに対応し、$x(n\Delta t) = x[n]$ と書くと

$$\begin{align}
\tilde{x}_{\mathrm{sampling}}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} Ш_{\Delta t}(t) x(t) e^{-2\pi i f t} dt \tag{3.2.4} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) e^{-2\pi i f n \Delta t} \tag{3.2.5} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2\pi i f n \Delta t}. \tag{3.2.6}
\end{align}$$

この $\tilde{x}_{\mathrm{sampling}}(f)$ を $x(t)$ 離散時間フーリエ変換と呼ぶこともある。

積のフーリエ変換はフーリエ変換の畳み込みに等しいことを用いると

$$\begin{align}
\tilde{x}_{\mathrm{sampling}}(f) &= \mathcal{F}([Ш_{\Delta t}(t) x(t)])(f) \tag{3.2.7} \\
&= \mathcal{F}[Ш_{\Delta t}(t)] * \tilde{x}(f). \tag{3.2.8}
\end{align}$$

ここで櫛関数 $\text{Ш}_{\Delta t}(t)$ は周期 Δt の関数だから、フーリエ級数を計算すると

$$\text{Ш}_{\Delta t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta t}\left(\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \text{Ш}_{\Delta t}(t') e^{-\frac{2\pi i k t'}{\Delta t}} dt'\right) e^{\frac{2\pi i k t}{\Delta t}} \tag{3.2.9}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t'-n\Delta t)\right)\right] e^{-\frac{2\pi i k t'}{\Delta t}} dt') e^{\frac{2\pi i k t}{\Delta t}} \tag{3.2.10}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}\delta(t') e^{-\frac{2\pi i k t'}{\Delta t}} dt'\right) e^{\frac{2\pi i k t}{\Delta t}} \tag{3.2.11}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i k t}{\Delta t}} \tag{3.2.12}$$

となるから、櫛関数のフーリエ変換は以下の通り櫛関数となることが分かる。

$$\mathcal{F}[\text{Ш}_{\Delta t}](f) = \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i k t}{\Delta t}} e^{-2\pi i f t} dt \tag{3.2.13}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f - \frac{k}{\Delta t}\right) \tag{3.2.14}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\text{Ш}_{1/\Delta t}(f). \tag{3.2.15}$$

つまり、サンプリングを行った後にフーリエ変換を行うことは、（通常の）フーリエ変換に櫛関数を畳み込むことに等しい:

$$\tilde{x}_{\text{sampling}}(f) = \frac{1}{\Delta t}\text{Ш}_{1/\Delta t} * \tilde{x}(f). \tag{3.2.16}$$

そして、この櫛関数を畳み込むことは、フーリエ変換で出力された周波数領域の波形に $1/\Delta t$ の周期性を持たせることを意味する。

$$\text{Ш}_{1/\Delta t} * \tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{x}(p)\,\text{Ш}_{1/\Delta t}(f-p)dp \tag{3.2.17}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{x}\left(f - \frac{n}{\Delta t}\right). \tag{3.2.18}$$

もし、元の波形の周波数が $-1/2\Delta t \leq f \leq 1/2\Delta t$ に収まっていれば、この範囲に制限した逆フーリエ変換を実行することで元の波形を再現できる。逆に、サンプリングを行う前の波形の周波数帯域が広すぎると、周波数領域で波形が重ね合わり、その部分の情報が損なわれてしまう。

すなわち、サンプリングレートが有限であることに由来する、利用可能な周波数の上限が存在する。アナログ信号を標本化する際、サンプリングレートの半分以上の周波数を持つ成分を正確に取り出すことは出来ない。この事実はシャノン・ナイキストの標本化定理（sampling theorem）として知られ、サンプリングレート $f_s = 1/\Delta t$ の半分の周波数、$f_{\text{Nyq}} := f_s/2$ をナイキスト周波数と呼ぶ。ナイキスト周波数を超える周波数成分は低周波成分に混じってしまい、逆フーリエ変換を掛けた際、偽の信号として現れうる。この偽信号のことをエイリアシング（折り返し雑音）と言い、信号解析においては避けるべき現象である。そのため、サンプリングレートの設定は、求めたい信号の周波数（の上限の半分）を十分上回るようにしなければならない。

さて、上で求めた $\tilde{x}_{\mathrm{sampling}}$ は無限長時間での測定を前提としており、現実的でない。表式から任意の f に対して値が求められるが、実用するには周波数領域も離散化する必要がある。そこで、データの長さを $L = N\Delta t$ として、$x(t)$ に区間 $[0, L]$ の周期性を仮定し、積分領域を有限化してしまうことを考える。この仮定のもとで、$x[i+N] = x[i] (i \in \mathbb{N})$ となる。

$$\tilde{x}_{\mathrm{disc}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2\pi i f n \Delta t} \tag{3.2.19}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} x[j] e^{-2\pi i f (j+kN)\Delta t} \quad (n = j + kN \text{ とおいた}) \tag{3.2.20}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f k L} \sum_{j=0}^{N-1} x[j] e^{-2\pi i f j \Delta t} = \text{Ш}_1(fL) \sum_{j=0}^{N-1} x[j] e^{-2\pi i f j \Delta t} \tag{3.2.21}$$

$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \delta\left(f - \frac{n}{L}\right) \right) \sum_{j=0}^{N-1} x[j] e^{-2\pi i f j \Delta t}. \tag{3.2.22}$$

ただし、$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ を最後の式変形で用いた。デルタ関数によって、f が $f_k = k/L$ という値を取るときにしか値が存在しない。つまり、有限の長さの信号を与え、それを周期的だと見做すことで周波数も間隔 $\Delta f = 1/L$ で離散化される。慣習的に $1/L$ の因子を落として、離散フーリエ変換

$$\tilde{x}[k] = \sum_{j=0}^{N-1} x[j] e^{-\frac{2\pi i j k}{N}} \tag{3.2.23}$$

を得る。上述の通り、使える周波数帯域は $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$ であるから、N 個の周波数点はこの範囲を N 等分するように間隔 $\Delta f (= f_s/N)$ で割り振られる。つまり、周波数領域は $\{f_k = k\Delta f - f_s/2 | 0 \leq k \leq N-1\}$ の N 個の点で分割され、$\tilde{x}[k] = \tilde{x}(f_k)$ である。同様に、離散逆フーリエ変換は

$$x[j] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k] e^{\frac{2\pi i j k}{N}} \tag{3.2.24}$$

となる。ここで、$1/N$ の因子は変換と逆変換で元の値へ戻るために必要なものである。

注意点として、$1/N$ の因子は文献によって扱いが異なる。例えば、$N = f_s L$ だから、$1/N = \Delta t / L = \Delta t \Delta f$ と書き換えて、この 2 つをそれぞれ $x[j]$ と $\tilde{x}[k]$ に押し付けることもできる。その場合、離散フーリエ変換は

$$\tilde{x}(f_k) = \sum_{j=0}^{N} x(t_j) e^{\frac{-2\pi i j k}{N}} \Delta t \tag{3.2.25}$$

となる。また、離散逆フーリエ変換は

$$x(t_j) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{x}(f_k) e^{\frac{2\pi i j k}{N}} \Delta f \tag{3.2.26}$$

のようになる。

3.3 パワースペクトル密度

3.3.1 パワースペクトル密度

時系列データ $x(t)$ に対して、パワー (power) とは、$|x(t)|^2$ で定義されるものである。物理的な解釈では、これは波のエネルギーに対応するものである。パーセヴァルの定理により、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(f)|^2 df \tag{3.3.1}$$

が成り立つ。この式は、パワーの積分は時間空間でも周波数空間でも等しくなることを示している。つまり、$|\tilde{x}(f)|^2$ は信号のパワー（の総和）をそれぞれの周波数に分けて記述したもの、言い換えればパワーの周波数スペクトルである。これによりパワースペクトル密度を定義できる。

$$P(f) := \lim_{T\to\infty} \frac{|\tilde{x}(f)|^2}{T} \tag{3.3.2}$$

ただし、T は信号の計測時間[*2]である。

時系列データ $x(t)$ に対して自己相関関数 $C(t,\tau) = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle$ を定義する。ここで、角括弧はアンサンブル平均を表すが、時系列データのエルゴード性（長時間平均とパラメータ空間の平均が等しくなる性質）を仮定すれば時間平均に置き換えることができる[*3]。

$$\begin{aligned} C(t,\tau) &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{x}(f)\tilde{x}^*(f') e^{-2\pi i f t} e^{2\pi i f(t+\tau)} && (3.3.3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df \left[\lim_{T\to\infty} \frac{|\tilde{x}(f)|^2}{T}\right] e^{2\pi i f\tau} && (3.3.4) \end{aligned}$$

この自己相関関数のフーリエ変換、すなわち角括弧の中身はパワースペクトル密度そのものである[*4]。

なお、実際の解析ではパワースペクトル密度として $P(f)$ そのものを用いることは少なく、代わりに正の周波数だけで定義された片側パワースペクトル密度 $P_{\rm one}(f)$ を用いることが多い。

$$P_{\rm one}(f) = \begin{cases} 2P(f) & (f \geq 0) \\ 0 & (f < 0) \end{cases} \tag{3.3.5}$$

本論文では、片側パワースペクトル密度を使用する際は添字 one を付けることとする。

3.3.2 ウェルチ法

真のノイズパワースペクトル密度は知り得ないので、入力データからノイズパワースペクトル密度を推定する必要がある。そこで使われる方法として、ウェルチ法（Welch method）と呼ばれる PSD の推定手法 [73] がある。ウェルチ法では、以下のようなアルゴリズムで PSD の計算を行う。

[*2] $1/T$ を定義に含めるのは、信号が有限時間内で終わらない場合 (逆フーリエ変換で積分領域が無限大の場合) に対応するためである。

[*3] 以降、エルゴード性は暗に仮定する。

[*4] この関係をウィーナー–ヒンチンの定理（Wiener–Khinchin theorem）と呼ぶ。

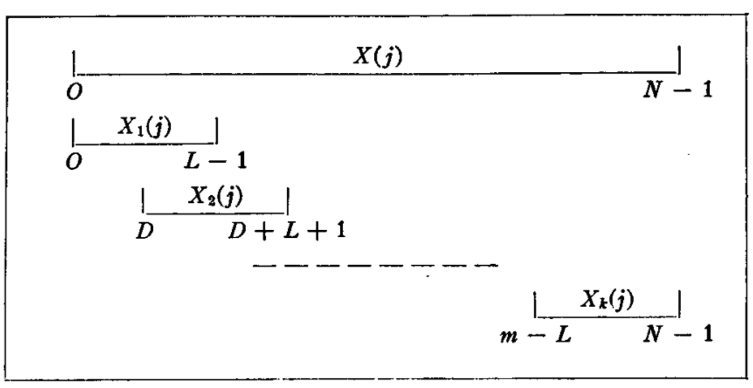


図 3.1　時系列データの分割の仕方。[73] より引用

1. 1 単位時間毎にサンプリングされ、N 個のデータを含む時系列データ列 $X(j)$ $(0 \leq j \leq N-1)$ を、図 3.1 のように重なりを作りながら L 個ずつに分割していく。次の分割は、前の分割の始点の D 個先から始まるように取る。このとき、

$$(K-1)D + L = N \tag{3.3.6}$$

が成立していなければならない。こうして時系列データ列を K 個の分割 $\{X_k\}_{k=1}^{K}$ に分ける。
2. 各分割 $X_k(1 \leq k \leq K)$ に対し、以下のように離散フーリエ変換を実行する。($W(j)$ は窓関数)

$$A_k(n) = \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1} X_k(j)W(j)e^{-\frac{2\pi ijn}{L}} \tag{3.3.7}$$

$$f_n := \frac{n}{L} \quad (n = 0, 1, \ldots, \lfloor L/2 \rfloor) \tag{3.3.8}$$

3. 分割ごとにパワースペクトルを計算する。式 (3.3.2) に倣って

$$I_k(f_n) = \frac{|A_k(n)|^2}{\sum_{j=0}^{L-1} W^2(j)} \tag{3.3.9}$$

4. 最終的な PSD として I_k の平均を取る。

$$P(f_n) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} I_k(f_n) \tag{3.3.10}$$

なお、実際の運用でノイズパワースペクトル密度を求めようとするとき、元のデータにグリッチ（glitch）[74] と呼ばれる突発的かつ大きなノイズが入っていたり、計算の際に窓関数を掛けたりすることで、パワースペクトル密度が歪んでしまうことがある。こうなってしまうと後の計算に影響を及ぼすので inverse spectrum truncation と呼ばれる処置を施す。詳しくは [75] の 7 章に譲る。

3.4　マッチドフィルター/信号雑音比

3.4.1　マッチドフィルター

時系列データが $x(t) = h(t) + n(t)$ のように重力波テンプレート部分 h と定常ノイズ n の和であると考える。ノイズは平均 0 のガウス過程であると仮定しておく。ノイズの定常性の仮定は、ノイズパワースペクトル

密度を $S_n(f)$、及び片側ノイズパワースペクトル密度を $S_{\rm one}(f)$ として

$$\langle \tilde{n}(f)\tilde{n}^*(f')\rangle = S_n(f)\delta(f-f') = \frac{1}{2}S_{\rm one}(|f|)\delta(f-f') \tag{3.4.1}$$

フィルター K を掛けた出力は、

$$c(t) = \int dt' x(t')K(t+t') \tag{3.4.2}$$

$$= \int dt' \int df \int df' \tilde{x}(f)\tilde{K}(f')e^{2\pi ift'}e^{2\pi if(t'+t)} \tag{3.4.3}$$

$$= \int df \int df' \tilde{x}(f)\tilde{K}(f')\delta(f+f')e^{2\pi ift'} \tag{3.4.4}$$

$$= \int df \tilde{x}(f)\tilde{K}^*(f)e^{-2\pi ift} \tag{3.4.5}$$

$$= \int df \tilde{h}(f)\tilde{K}^*(f)e^{-2\pi ift} + \int df \tilde{n}(f)\tilde{K}^*(f)e^{-2\pi ift} \tag{3.4.6}$$

最終行の各項は、それぞれ重力波信号テンプレートとノイズにフィルターを掛けたものである。これらを S と N とおく。$\langle N\rangle = 0$ であることに注意すると、ノイズの大きさに対する信号強度を示す信号雑音比（SNR : signal-noise ratio）ρ は次のように定義するのが妥当である。

$$\rho = \frac{S}{\langle (N-\langle N\rangle)^2\rangle^{1/2}} \tag{3.4.7}$$

分母は、ノイズの定常性の仮定 (3.4.1) から、

$$\left\langle (N-\langle N\rangle)^2\right\rangle = \left\langle \left(\int df \tilde{n}(f)\tilde{K}^*(f)e^{-2\pi ift}\right)^2\right\rangle \tag{3.4.8}$$

$$= \int df S_n(f)\tilde{K}(f)e^{2\pi ift}\tilde{K}^*(f)e^{-2\pi ift} \tag{3.4.9}$$

となる。これを式 (3.4.7) に代入すれば

$$\rho = \frac{\int df \tilde{h}(f)\tilde{K}^*(f)e^{-2\pi ift}}{[\int df S_n(f)\tilde{K}(f)\tilde{K}^*(f)]^{1/2}} \tag{3.4.10}$$

というように書ける。ここで、この SNR を最大化するような u を考えたい [76]。L^2 空間におけるコーシー・シュワルツの不等式より、

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} A(f)B(f)df\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}|A(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty}|B(f)|^2 df \tag{3.4.11}$$

で $A(f) \propto B(f)$ のとき等号成立となり最大値が取れる。今の場合、$A(f) = \tilde{K}^*(f)e^{-2\pi ift}\sqrt{S_n(f)}, B(f) = \tilde{h}(f)/\sqrt{S_n(f)}$ と置けば、

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{h}(f)\tilde{K}^*(f)e^{-2\pi ift}\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} df|\tilde{K}(f)|^2 S_n(f)\int_{-\infty}^{\infty} df\frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} \tag{3.4.12}$$

よって

$$|\rho|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} \tag{3.4.13}$$

であり、等号成立条件からフィルター K は

$$\tilde{K}(f) \propto \frac{\tilde{h}(f)}{S_n(f)} e^{-2\pi i f t} \tag{3.4.14}$$

で与えられる。このフィルターのことをマッチドフィルター（あるいはウィーナーフィルター）と呼ぶ。実数倍の比例係数は ρ の表式 (3.4.10) から分かる通りキャンセルされるため問題にならない。ここで、

$$(A|B) = \int df \frac{\tilde{A}(f)\tilde{B}^*(f)}{S_n(f)} \tag{3.4.15}$$

という記号を導入し、式 (3.4.14) のマッチドフィルター K を採用すると、式 (3.4.10) は

$$\rho = \frac{(h|h)}{(h|h)^{1/2}} = (h|h)^{1/2} \tag{3.4.16}$$

なお実際のデータでは、信号とノイズは分離されていないので、SNR としてはテンプレート $h(t)$ を仮定して

$$\rho = \frac{(x|h)}{(h|h)^{1/2}} = (x|\hat{h}) \tag{3.4.17}$$

を計算する。($\hat{h} = h/\sqrt{(h|h)}$ とおいた)

3.4.2　時刻

上述のフィルターは、信号の時刻や位相を暗に固定しており、続いてそれらについて最適化を行う必要がある。まず、時刻について考える。信号の基準時刻を t_0 と書き、その分だけ遅らせたテンプレート $h'(t) = h(t - t_0)$ のフーリエ変換 $\tilde{h}'$ を求めると

$$\tilde{h}'(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t_0) e^{-2\pi i f t} dt \tag{3.4.18}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-2\pi i f (t' + t_0)} dt' \tag{3.4.19}$$

$$= \tilde{h}(f) e^{-2\pi i f t_0} \tag{3.4.20}$$

書き換えると、$\tilde{h}(f) = \tilde{h}'(f) e^{2\pi i f t_0}$ となる。これを ρ の表式に代入すると、t_0 の関数として

$$\rho(t_0) = (x|\hat{h}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(f)\tilde{\hat{h}}'(f)^*}{S_n(f)} df \tag{3.4.21}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(f)\tilde{\hat{h}}(f)^*}{S_n(f)} e^{2\pi i f t_0} df \tag{3.4.22}$$

が得られる。

つまり、テンプレートをずらして SNR を逐次計算していくことで「SNR の時系列データ」が求まり、その中で最大値を取る時刻 t_0 を決めることが出来れば、信号の到来時刻を推定できる。実際の観測では、SNR が高いからといってそれが本当に信号由来のものなのかは分からないため、SNR が高く出る時刻のことをトリガー (trigger) と呼び、このトリガーの時刻のデータを更なる解析に掛ける。

3.4.3　位相

本研究で念頭に置く連星合体の場合、テンプレートを

$$\tilde{h}(f) = \tilde{h}(f; \Phi = 0)e^{i\Phi(f)} \tag{3.4.23}$$

と書くとき、位相は定数 Φ_0 を伴って

$$\Phi(f) = \Phi_0 - 2\pi f t_0 + \cdots \tag{3.4.24}$$

という形で現れる。このうち $-2\pi f t_0$ の部分は、重力波の到来時刻によるものであり、前項で考えたものである。次に Φ_0 の依存性を考えると

$$\tilde{h}(f) = \tilde{h}(f; \Phi_0 = 0)e^{i\Phi_0}e^{-2\pi i f t_0} \tag{3.4.25}$$

$$= \tilde{h}(f; \Phi_0 = 0)(\cos\Phi_0 + i\sin\Phi_0)e^{-2\pi i f t_0}. \tag{3.4.26}$$

簡単のため $t_0 = 0$ として

$$\tilde{h}_c(f) = \tilde{h}(f; \Phi_0 = 0) \tag{3.4.27}$$

$$\tilde{h}_s(f) = i\tilde{h}_c(f) \tag{3.4.28}$$

という記号を導入すると、テンプレートは $\tilde{h}(f) = \tilde{h}_c(f)\cos\Phi_0 + \tilde{h}_s(f)\sin\Phi_0$ と書ける。

この位相定数 Φ_0 について、SNR を最大化することを考える。その際、

$$(h_c|h_c) = (h_s|h_s) = 1 \tag{3.4.29}$$

$$(h_c|h_s) = 0 \tag{3.4.30}$$

という規格化と直交性を仮定する。直交性の仮定は

$$(h_c|h_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(f; \Phi_0 = 0)\left(-i\tilde{h}^*(f; \Phi_0 = 0)\right)}{S_n(f)} df \tag{3.4.31}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty} \frac{-i|\tilde{h}(f; \Phi_0 = 0)|^2}{S_n(f)} df \tag{3.4.32}$$

$$= 0 \tag{3.4.33}$$

より要請されるものである[*5]。2 つのテンプレートに対して別々に計算を行うが、それをまとめてフィルターを $\tilde{Q} = (\tilde{h}_c\cos\Phi_0 + i\tilde{h}_s\sin\Phi_0)$ のように複素化して考えると、SNR は

$$\rho = (x|Q) = (x|h_c)\cos\Phi_0 + i(x|h_s)\sin\Phi_0 \tag{3.4.34}$$

この Φ_0 を動かして、SNR を最大化したい。そのために以下のように計算する。

$$|(x|Q)|^2 = \{(x|h_c)^2 + (x|h_s)^2\}\left(\frac{(x|h_c)}{\sqrt{(x|h_c)^2 + (x|h_s)^2}}\cos\Phi_0 + \frac{(x|h_s)}{\sqrt{(x|h_c)^2 + (x|h_s)^2}}\sin\Phi_0\right) \tag{3.4.35}$$

$$= \{(x|h_c)^2 + (x|h_s)^2\}\sin(\Phi_0 + \alpha). \tag{3.4.36}$$

[*5] 現実の重力波波形においては $\Phi(f)$ がより複雑なため近似的にしか成り立たないが、連星合体によるインスパイラル波形の場合にはよく成り立つ。

ここで、α は $\sin\alpha = \frac{(x|h_c)}{\sqrt{(x|h_c)^2+(x|h_s)^2}}, \cos\alpha = \frac{(x|h_s)}{\sqrt{(x|h_c)^2+(x|h_s)^2}}$ を満たす。この表式を最大化するには、$\Phi_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ となるように選べばよい。その結果、最大値

$$\max_{\Phi_0} \rho = |(x|Q)| = \sqrt{(x|h_c)^2 + (x|h_s)^2} \tag{3.4.37}$$

を得る。これは、フィルター Q を $\tilde{Q} = \tilde{h}_c + i\tilde{h}_s$ と置き直し、単に絶対値を取っていることと変わらない。

3.5 カイ二乗検定

マッチドフィルターによってマッチしたトリガーが、ノイズ由来のものではないことを検証する必要がある。そのためにカイ二乗統計量 χ^2 という統計量を定義する。詳細は [77] の 4 章を参照されたい。

まず、周波数帯域を p 分割する。

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \{f|0 \le f < f_1\}, \\ \Delta f_2 &= \{f|f_1 \le f < f_2\}, \\ &\vdots \\ \Delta f_p &= \{f|f_{p-1} \le f < \infty\}. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

このとき、分割の仕方は各 $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ に対し、規格化されたテンプレートを h（すなわち $(h|h) = 1$）として

$$\rho_j := \int_{-\Delta f_i \cup \Delta f_i} \frac{\tilde{h}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} df = \frac{1}{p} \tag{3.5.2}$$

となるように取る。この分割数を周波数ビン数と呼ぶ。p の値は特に決まっておらず、経験的に決められることが多い。この分割操作は、周波数帯が異なる p 個の観測器からのデータを考えることと解釈できる。ρ_j の定義により、

$$\rho = \sum_{j=1}^{p} \rho_j \tag{3.5.3}$$

である。信号が無く、定常ガウスノイズのみの場合、期待値は

$$\langle \rho_j \rangle = 0, \quad \langle \rho_j^2 \rangle = \frac{1}{p} \tag{3.5.4}$$

となり、ρ_j は期待値 0、分散 $\sigma^2 = \frac{1}{p}$ のガウス分布に従う。$\Delta\rho_j = \rho_j - \frac{\rho}{p}$ という量を定義する。この量は、分割した各周波数帯域で計算した SNR と全体の SNR から予想される値との差を示している。その上で、カイ二乗統計量 (chi-square statistic) と呼ばれる量を定義する:

$$\chi^2 = p \sum_{j=1}^{p} (\Delta\rho_j)^2 \tag{3.5.5}$$

この量は定義により、入力データにテンプレートと同じ信号しか存在しなかった場合には 0 になる。図 3.2 に見るように、テンプレートに近い信号であれば各帯域 Δf_j で同じぐらいの SNR になり、$\Delta\rho_j$ はほぼ 0 になる。

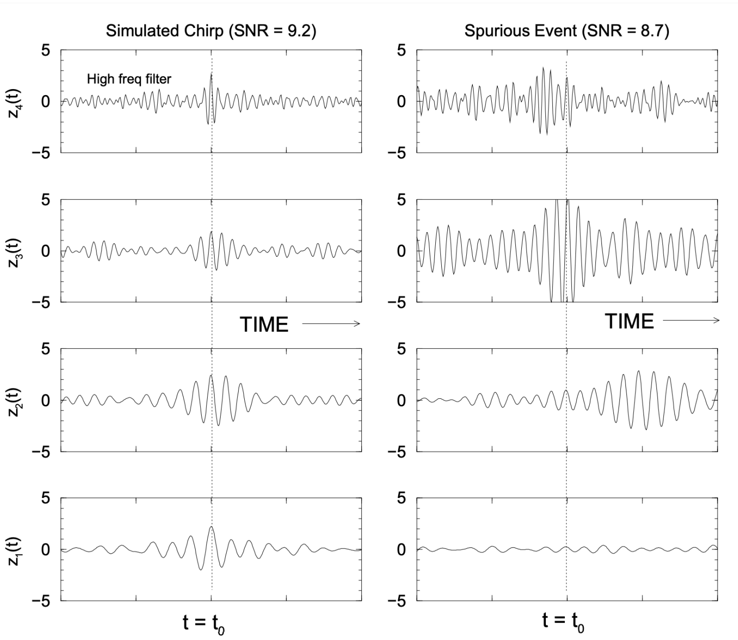


図 3.2　$p = 4$ のとき、真のチャープ信号と偽の信号の SNR をを分割した周波数毎に示したもの（図中の z は本論文の ρ と同義）。テンプレートの重みが等分配されるように周波数を分割しているため、真の信号の SNR は均等に現れている。それに対して偽の信号の SNR は帯域によって偏りがある。（ [77] より抜粋）

また、この量はノイズとして定常ガウスノイズのみが存在するとき、自由度 $p-1$ のカイ二乗分布に従う*6（ [77] の Appendix A 参照）。つまり、その時の期待値は

$$\langle \chi^2 \rangle = p - 1 \tag{3.5.6}$$

である。観測データに対して χ^2 を計算すると、ガウスノイズしか無ければ $p-1$ に近い値が出て、ガウスノイズでは説明できないグリッチなどがある時は大きな値を返す。言い換えれば、観測データの中にガウスノイズとテンプレート通りの信号が存在するような状況ならば、χ^2 はほぼ $p-1$ を指し示す筈である。実際の観測でも、非ガウスノイズを極力除去した上で、信号が存在するかどうかの判断基準の 1 つにこの量を用いている。

連星合体の場合は式 (3.4.30) で与えた直交するテンプレート 2 つを考えるため、その分自由度が増える。自由度が $p-1$ ではなく $2p-2$ と 2 倍され、χ^2 の表式は

$$\chi^2 = p \sum_{i=1}^{p} \left[(\Delta\rho_{\cos,i})^2 + (\Delta\rho_{\sin,i})^2 \right] \tag{3.5.7}$$

のようになる。また、実用上は式 (3.5.5) の χ^2 がそのまま用いられることは少なく、自由度で規格化したもの

$$\chi_r^2 = \frac{\chi^2}{2p-2} \tag{3.5.8}$$

がよく用いられる。

*6 このことがカイ二乗統計量と呼ばれる所以である。

3.6 順位付け統計量

実際の観測では、膨大な時間のデータの中から探索を行う必要がある。その中に複数の重力波イベントがあったり、或いはノイズによる偽イベントがあったりするので、高い SNR を出すトリガーも少なからず出てくる。そうなると、それらトリガーの「重力波イベントらしさ」を順位付けして整理する必要がある。

その「重力波イベントらしさ」の特徴付けに用いられる量の総称を、順位付け統計量（ranking statistic）、または検出統計量（detection statistic）と呼ぶ。一貫した定義がある訳ではなく、目的に応じて改良が続けられている（ [78] などを参照のこと）。本研究では、CBC 解析で伝統的に用いられてきた再加重信号雑音比（re-weighted SNR）$\hat{\rho}$ [79, 80] を使用することとする。その定義は、規格化された χ_r^2 を用いて

$$\hat{\rho} = \begin{cases} \rho \left[\frac{1+(\chi_r^2)^3}{2} \right]^{-1/6} & (\chi_r^2 > 1) \\ \rho & (\chi_r^2 \leq 1) \end{cases} \tag{3.6.1}$$

という量を定義する [79]。これは、通常の SNR から、χ^2 の計算によって重力波イベント由来ではないと考えられるトリガーの有意性を下げる処理を行っている。

3.7 誤報率

ここまで、「その波形がノイズの中でどれだけ目立っているか？」という観点からまず SNR を計算し、「その高い SNR がノイズ由来かどうか」を測るカイ二乗統計量と組み合わせることで順位付け統計量を計算したのだった。次に、「その順位付け統計量はバックグラウンドノイズからどの程度出てくるものなのか？」という観点から検証する必要がある。そこで出てくるのが誤報率という概念である。誤報率（false alarm rate）とは、実際にはノイズしか存在しないにも関わらず、イベントとして認識・検出されてしまう回数を示す指標である。具体的には、バックグラウンドノイズのみが存在する状況下で、順位付け統計量の計算を同じように行い、出てくる値の統計を取ることでどれぐらいの頻度でその値が出るのかを算定する。例えば、A という値を得たイベントがあったとして、誤報率は「A 以上の統計量を得たイベント数/検証に用いた時間」という式で計算される。このことから分かる通り、誤報率は「○年に 1 度」といった表現がなされる。また、バックグラウンドノイズが作る順位付け統計量分布の標準偏差 σ を使って誤報率を表現することもある。十分多くのバックグラウンド測定を行えば、バックグラウンド統計量分布が推定できる。このとき、中心極限定理*7によって、バックグラウンドノイズ由来の統計量分布が正規分布に近づくことが期待される。正規分布になるのであれば σ を使って、イベントの統計量がバックグラウンドの統計量分布の中でどれだけ離れたところにあるのかを評価できる。例えば、GW150914 は 5.1σ の統計有意性を持つイベントであると報告されている [81]。

*7 中心極限定理とは、平均 μ、分散 σ^2 の独立同一分布に従う確率変数列 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ の標本平均

$$\bar{X_n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{3.7.1}$$

で作った確率変数列 $\{Z_n = \sqrt{n}(\bar{X_n} - \mu)/\sigma\}_{n \in \mathbb{N}}$ が標準正規分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ に分布収束（弱収束）すること

$$Z_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \tag{3.7.2}$$

を主張する定理である。言い換えると、平均と分散が定義できる母集団から非復元抽出を繰り返し、十分大きい数の標本平均を取れば、標本平均の分布は正規分布に近づいていくことが保証されている。

3.8 テンプレートバンク

本章では、重力波探索の概要を述べてきた。すなわち、順位付け統計量を最大化するようなパラメータの組を持ってくればよいのである。しかし、これは闇雲に探索をしてしまうとかなりの時間を要する作業である。効率化をしなければ計算に時間が掛かってしまい、次々に蓄積されていく重力波観測データに対応できなくなる。それに加え、本当にその探索が十分なのか（パラメータの探索密度は適切か）という問題も生じる。そこで、実際の重力波観測では、探索したいパラメータ空間の領域を予め制限した上で、その中で必要十分な個数のパラメータの集合を用意することが行われている。このパラメータの集合はテンプレートバンク（template bank）と呼ばれている。

テンプレートバンクを作成する際には、テンプレート同士の「間隔」としてマッチ（match）と呼ばれる量を定義し、定量的にテンプレートの相違を評価する。2 つの波形 h_1, h_2 に対して、マッチは次のように定義される。

$$\mathcal{O}\left(h_1, h_2\right) := \frac{\left(h_1 | h_2\right)}{\sqrt{\left(h_1 | h_1\right)\left(h_2 | h_2\right)}} \tag{3.8.1}$$

マッチは $0 \leq \mathcal{O}\left(h_1, h_2\right) \leq 1$ の値を取る。完全に波形が一致するとき、つまり $h_1 = h_2$ のとき、$\mathcal{O}\left(h_1, h_2\right) = 1$ となり、それ以外の場合はテンプレートのずれに応じて 1 より小さい値を取る。テンプレートバンクを実際に生成するときには、許容できる最小マッチを与えた上で、探索範囲を網羅できるようにテンプレートを取っていくことになる。すなわち理想的なテンプレートバンクでは、どれか 1 つ任意にテンプレートを取っても、必ず 1 つ以上は最小マッチ以上の重なりを持つテンプレートが存在する。

テンプレートバンクの生成方法にはいくつか方法があるが、本研究では確率的なテンプレートバンク生成 [82] を行う。確率的な生成とは、乱数を振って得たパラメータを使ってバンクを生成する手法である。基本的には以下のような手順を踏む。

1. 予め決められたパラメータの探索範囲内で、乱数でテンプレートを取る。
2. 取ったテンプレートと既に採択されているテンプレートの中で、それぞれ (3.8.1) を計算する。
3. 最小マッチを満たすものが無いならば、乱数で得たテンプレートを採択する。逆に、最小マッチを満たすものがあった場合は、乱数で得たテンプレートを棄却する。
4. このサイクルを探索範囲を埋め尽くせるようになるまで繰り返す。

実際に運用するには工夫が必要であるが、アルゴリズムの詳細についての説明は本研究の趣旨を逸脱するため [83, 84] を参照されたい。主に使用される確率的生成ライブラリは `sbank` [85] である。長年使用されてきた実績があり、元々 `lalsuite` というライブラリの一部であったが、2021 年にスピンオフして現在は独立のライブラリとなっている。本研究でも `sbank` を利用してテンプレートバンクを作成した。

3.9 PyCBC での実際の運用

`PyCBC` とは、重力波天文学で広く利用されている、重力波データ解析に便利な機能を集約した Python 用ライブラリである [86]。オープンソースであり、本稿執筆時点も研究者たちの手によって精力的に開発が続けられている。歴史的には、まず `FINDCHIRP` [75] という重力波解析パイプラインが最初に開発された。その後 `ihope` [87, 88] という名前のパイプラインに発展・継承されたものが、さらに改良され Python ライブラリと

して整理されたものが PyCBC である。PyCBC は実際の重力波イベント解析にもよく用いられており（ [2] など)、本研究の解析作業も前述の研究趣旨に沿って PyCBC を活用している。

実例として Advanced LIGO の探索パイプラインは、図 3.3 のような手順で行われている [89]。本研究では、1 台の検出器しか考えないが、実際には複数台存在するため、それらの結果を統合するための手順が存在している。要点を纏めると以下のようになる。

1. 検出器のデータから、ノイズのパワースペクトル密度（PSD）を推定する。
2. 推定したノイズの PSD を用いてテンプレートバンクを作成する。
3. データには原因不明の突発的なノイズ（グリッチ）が混ざっている場合がある。それを除外するためにデータの中にある明らかに逸脱した部分を検出し、その周辺に窓関数を掛けて 0 にしてしまう。この作業をゲーティング (gating）と呼ぶ。
4. テンプレートバンクを使って、観測データにマッチドフィルターを掛け、SNR を計算する。SNR が閾値を超えた点をトリガーとして採用する。
5. トリガーでの χ^2 の値を計算する。
6. 得られた SNRρ と χ^2 の値を使って、順位付け統計量 $\hat{\rho}$ を計算する。
7. 一貫性テスト（coincidence test）として、それぞれの検出器で整合性が取れているかを見る。トリガーは検出器間の重力波伝播時間以下の到着時間差で観測されていなければならない。また、トリガーはそれぞれの検出器において同じテンプレートで検知されなければならない。ここまでの探索過程を通過し、時刻とパラメータが一致したトリガーを候補イベント（candidate event）と呼ぶ。
8. 予めデータ品質に関して、問題があると考えられる時間帯にはフラグが記録されており、もし品質に問題があればその部分は却下（veto）される。
9. （順位付け統計量 $\hat{\rho}$ の関数として）誤報率を計算する。信号がない状態での検出器のノイズを直接測定することはできないため、バックグラウンドノイズのデータセットを作る。

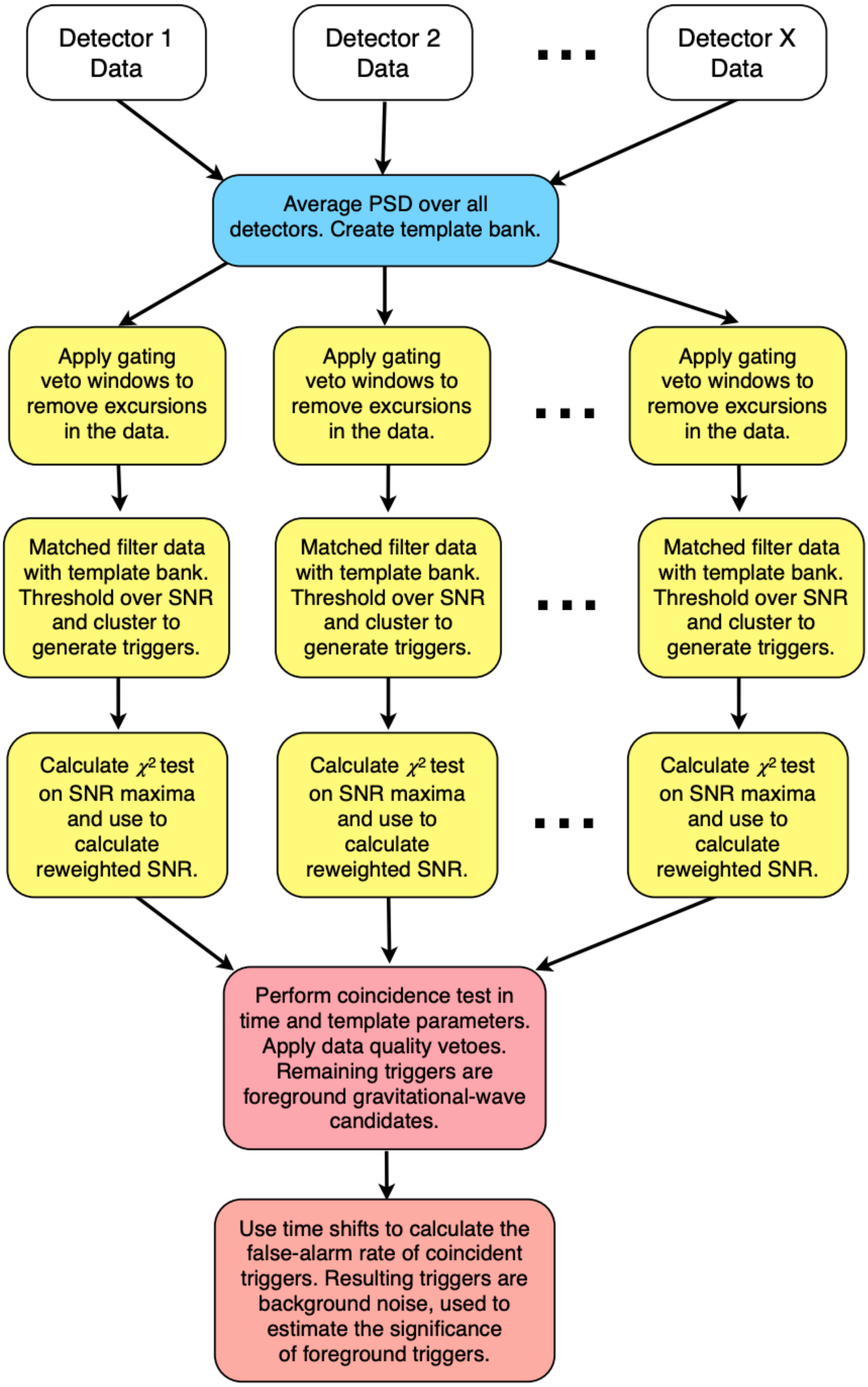


図 3.3　PyCBC の行う探索のフローチャート [89]

3.10　パラメータ推定

観測では、イベントの検出が確認されたあとに、そのイベントがどのようなパラメータの現象によって引き起こされたかを推定する作業が行われる。これがパラメータ推定（parameter inference）である [90]。イベントの検出が確認できた時点で、重力波の発生機構は分かったものと考え、パラメータの分布をベイズ推定の手法を使って考えていくことになる。発生機構のモデルを M、そこに代入すべきパラメータ群を $\vec{\theta}$、検出器データを $d(t)$ と表すと、求めたいものは条件付き確率 $p(\vec{\theta}|d, M)$ である。この値はベイズの定理より、

$$p(\vec{\theta}|d, M) = \frac{p(d|\vec{\theta}, M)p(\vec{\theta}|M)}{p(d|M)} \tag{3.10.1}$$

と書き表すことができる。以下、各項について説明する。

- $p(\vec{\theta}|d, M)$：事後確率（posterior probability）事前分布から観測データを受けて、更新したパラメータの確率分布。
- $p(d|\vec{\theta}, M)$：尤度（likelihood）モデル M のパラメータが $\vec{\theta}$ であったと仮定したとき、データ d を得る可能性のこと。
- $p(\vec{\theta}|M)$：事前確率（prior probability）モデル M を仮定した上で、観測結果を得る前に観測者が持っている情報として、どのようなパラメータが得られるかを示す確率分布。この部分は推定を行う際に与えてやる必要がある。特に仮定を置かない場合は一様分布であったり、パラメータによっては過去の観測データから作成した天文学的な事前分布を用いることもある。
- $p(d|M)$：証拠（evidence）（パラメータの値を問うことなく）モデル M に従ってデータ d を得る確率。

第 4 章

大質量ブラックホール-円盤系が放出する重力波

この章では、本研究の元となったブラックホールと円盤の系が放出する重力波に関する先行研究について詳述する。本章の内容は、主として柴田らの研究 [91] による。

4.1 GW190521 の再解釈を通じて

第 2 章で詳しく述べた通り、GW190521 は今までにないレアなイベントである。連星ブラックホール連星合体と解釈して無矛盾であるのだが、そのためもあって波形の解釈を再考する研究も少なからず存在する。例として、

- 放物線軌道を描くダイナミカルなブラックホール連星合体 [92]
- 高離心率を持ったブラックホール連星合体 [93, 94]
- ブラックホールの正面衝突 [95]
- ボゾン星の合体 [96]
- 大質量比のブラックホール連星合体 [97]

などがあり、そのうちの 1 つが本章で解説する高質量ブラックホール-円盤系由来の重力波である。GW190521 の大きな特徴として、今までのコンパクト天体連星合体イベントと比べるとインスパイラル部分が短く、リングダウン段階における抑制の掛かり方が弱くなっている点、数回の波動サイクルしか観測できていない点が挙げられる。これを連星ブラックホールで表そうとすると比較的大質量のブラックホールが必要になり、LIGO-Virgo コラボレーションによる報告も、それに沿ったものとなったのだった。

しかしながら、このような波形は、短期間の重力波バーストによってでも再現できる可能性がある。数サイクルのバーストという重力波パターンは、非軸対称変形のシミュレーションの際にも現れるものである。その中でも、柴田らはブラックホールと大質量のガス円盤の系を考察した。このような系では、軸対称の状態だと観測に掛かるほど大きな重力波は出ない。非軸対称な摂動が円盤に加わったときだけ、質量分布モーメントの四重極以上の成分が大きな時間変化を起こし、観測可能な重力波が得られると考えられる。

4.2 考える系

ブラックホールの初期質量は $M_{\rm BH,0} = 50M_\odot$ で固定する。一方、円盤の質量は $M_{\rm disk} = 10$–$50M_\odot$ の範囲で取る。これらの数値はおよそ 40–50Hz の重力波に対応するように取られている。これを理解するための大まかな議論として、質量が $M_{\rm BH,0}$ と $M_{\rm disk}$ の連星に置き換えて考えてみる。半径 R の円軌道で回転する連星について、角周波数は

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3} \quad (M = m_1 + m_2) \tag{4.2.1}$$

と書ける。簡単のため、R がシュバルツシルトブラックホールの ISCO（innermost stable circular orbit: 最内安定円軌道）を考えると、$R = \frac{6GM}{c^2}$ である。

$$\omega = \frac{c^3}{6^{3/2}GM} \tag{4.2.2}$$

$\omega = 2\pi f$ に注意して、周波数 f は

$$f = 2.18 \times 10^3 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1} \ \mathrm{Hz} \tag{4.2.3}$$

となり、$M = 40$–$50M_\odot$ を代入すれば、確かに $f \approx 40$–50Hz の値を得る。

このような系は、前駆星（progenitor star）として 190–260$M_\odot$ 以上の質量を持つ高速回転する金属欠乏星[*1]が崩壊する過程で形成できると考えられている。この質量の星は、125$M_\odot$ 以上の CO コア（附録 B を参照）を作り、対不安定性によって重力崩壊を起こした後、大質量のブラックホールを残す（2.3.4.3 目を参照）[*2]。金属欠乏という条件は、種族II星（population II star, pop II star）及び種族III星（population III star, pop III star）[*3][*4]に当てはまり、この条件は十分重い CO コアを作るために必要である。その理由は、金属量が多いと恒星風による質量損失が大きくなり [98]、セットアップとして不都合であると考えられるからである。ここで CO コアの質量がそのままブラックホールの質量になる訳ではない点に注意を要する。高速回転する大質量星のは、コアの重力崩壊の際に遠心力によって支えられた質量の一部が大質量円盤を形成する可能性が数値シミュレーションによって示されている [99]。このシミュレーションでは、初期質量 320$M_\odot$、150$M_\odot$ の CO コアを持つ星が重力崩壊を起こすと、約 130$M_\odot$ のブラックホールが約 20$M_\odot$ の円盤に囲まれた状態が実現することが示された。なお、崩壊時に形成されるブラックホールと円盤の質量は、恒星進化計算で未だに詳細が分かっていない、崩壊前の CO コアの角速度分布に強く依存する可能性がある。もしコアが高い角運動量を持っていれば、ブラックホールに行く質量が円盤に分け与えられるため、ブラックホールは軽くなり円盤は重くなる。そこで、柴田らは崩壊直前の CO コアに高い角運動量が存在する場合を想定し、重力崩壊時に両者とも数十 $M_\odot$ のブラックホールと円盤の系が形成される状況を仮定している。

[*1] 金属欠乏星（metal poor star）とは、文字通り金属量（metallicity）が低い恒星のことである。但し、天文学の文脈では金属（metal）とはヘリウムより重い元素を指す。

[*2] 対不安定性超新星爆発は CO コアの質量換算で $70M_\odot \lesssim M_{\rm CO} \lesssim 125M_\odot$ のときに生じ、残骸を残さないと考えられている。

[*3] ウォルター・バーデ（Walter Baade）によって提唱された、銀河系内の恒星を金属量によって分類する考え方に基づくものである。金属を多く含むものが種族I（Pop I）、少ないものが種族II（Pop II）と分類される。バーデの分類は元々 2 つだったが、後に宇宙初期の金属合成がまだ行われていない時期に形成されたとされる、金属を含まない星の分類として種族IIIが追加された。種族III星は初代星とも呼ばれる。なお、現時点では種族III星は発見されていない。

[*4] 種族III星は、初代星と呼ばれることもある。

4.3 行ったシミュレーション

以上に述べた系について、アインシュタイン方程式と流体力学[*5]の方程式群を数値計算をしていく。数値相対論の計算には、2.4.3 節で説明した BSSN 形式を用いている。

4.3.1 セットアップの詳細

4.3.1.1 質量とエントロピー

ブラックホールの質量に対する円盤の質量の比は $R_{\mathrm{mass}} = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0$ のいずれかで固定する。すなわち円盤の質量 M_{disk} は、$15, 20, 25, 30, 40, 50 M_{\odot}$ のいずれかになる（なお、数値計算の都合上、M_{disk} の値は若干揺らぐ。表 4.1 参照)。また、バリオン毎のエントロピーは $s/k_B = 11$–17 の整数値で設定し、初期状態では円盤全体で等エントロピーであると仮定しておく。エントロピーを与える理由は、円盤のサイズを制御するためである。エントロピーが高いほど、同じ静止質量密度に対する圧力は大きくなり、円盤は小さくなろうとする。これら 2 つのパラメータはモデルの命名に関係しており、表にあるモデルの名称の頭文字は円盤質量、後ろの数字はバリオン毎のエントロピーを表す。

4.3.1.2 回転速度

円盤の回転速度は、比角運動量（specific angular momentum）$j := c^{-2} h u_{\phi}$ と角速度 Ω の関係で規定する。ここで、u^{μ} は流体の四元速度である。

$$j \propto \Omega^{-n} \tag{4.3.1}$$

これについて詳しく見てみる。流体円盤に対する一般相対論的な回転曲線[*6]は、一般に

$$j = j(\Omega) \tag{4.3.2}$$

と書くことができる [100]。このように、比角運動量が角速度のみに依存している場合、流体力学におけるベルヌーイの式の積分を簡単に計算することができる。この形式の簡単なものとして $j \propto \Omega^{-n}$ [101, 102] が、このシミュレーションでは用いられており、非相対論極限でこの形式を考えると、$j \approx r^2 \Omega$ より、

$$\Omega \propto r^{-\frac{2}{n+1}} \tag{4.3.3}$$

の関係を得る。$n = 1/3$ を代入すれば、$\Omega \propto r^{-3/2}$ となり、ケプラーの第三法則に従う、所謂ケプラー運動を再現できる。n の値を大きくすると j が小さくなり、遠心力が小さくなる結果として円盤の厚みが増す。今回のシミュレーションでは、先行研究 [102] に合わせて $n = 1/7$ としてある。

*5 宇宙空間における流体は基本的にプラズマとして存在するため、実際には電磁流体力学での取扱いが必要になるが、このシミュレーションでは通常の流体として考えている。

*6 回転曲線とは、回転速度を中心からの距離の関数で表したものを指す。

4.3.1.3　円盤の大きさ

円盤の内半径は、無次元角運動量 $\chi \approx 0.8$ のブラックホールの ISCO 半径より大きくなるように $r_{\rm in} = 2GM_{BH,0}/c^2$ とセットされている。なお、カーブラックホールにおける ISCO 半径は

$$r_{\rm ISCO} = \frac{GM}{c^2}(3 + Z_2 \pm \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}) \tag{4.3.4}$$

$$Z_1 = 1 + \sqrt[3]{1 - \chi^2}(\sqrt[3]{1 + \chi} + \sqrt[3]{1 - \chi}) \tag{4.3.5}$$

$$Z_2 = \sqrt{3\chi^2 + Z_1^2} \tag{4.3.6}$$

と表される [103]。正号と負号はそれぞれ逆行軌道と順行軌道を表しており、今の場合 $\chi = 0.8$ を代入して負号を取れば $r_{\rm ISCO} = 1.16GM/c^2$ という値を得る。

また、外半径 $r_{\rm out}$ は $r_{\rm out}/(GM_{BH,0}c^{-2}) = 21$–$53$ の範囲で設定される。この大きさは回転する大質量恒星核の崩壊で生じる円盤として尤もらしいものを取っている [99]。

Model	$M_{\rm disk}$	$R_{\rm mass}$	χ	$r_{\rm in}$	$r_{\rm out}$	s/k_B	$\rho_{\rm max}$	$P_{\rm orb}$
L11	15.1	0.30	0.78	2.0	21.8	11	4.35	119
L12	15.1	0.30	0.79	2.0	27.9	12	2.85	126
J12	20.0	0.40	0.78	2.0	25.4	12	3.87	129
J13	19.9	0.40	0.78	2.0	32.8	13	2.54	135
K13	25.0	0.50	0.78	2.0	29.7	13	3.32	137
K14	25.0	0.50	0.78	2.0	38.6	14	2.21	144
M12	30.1	0.60	0.77	2.0	21.1	12	6.62	130
M13	30.0	0.60	0.77	2.0	27.0	13	4.26	139
M14	29.9	0.60	0.78	2.0	35.0	14	2.79	147
M15	30.1	0.60	0.78	2.0	45.6	15	1.87	153
H14	40.0	0.80	0.76	2.0	28.9	14	4.39	150
H15	40.0	0.80	0.76	2.0	37.4	15	2.89	157
H16	40.0	0.80	0.77	2.0	49.0	16	1.90	163
E15	50.1	1.00	0.76	2.0	31.0	15	4.35	158
E16	50.2	1.00	0.76	2.0	40.0	16	2.86	168
E17	50.0	1.00	0.77	2.0	52.6	17	1.86	175

表 4.1　各モデルの名称と初期パラメータの表（ [91] より転載）

4.4　シミュレーション結果

4.4.1　円盤の変形

シミュレーションでは初期摂動を加えていないが、この系は力学的に不安定であるため軽微な数値誤差によって円盤に変形が生じる。数値誤差によって円盤の密度の高い部分ができると、重力によってより密度を高めるフィードバックが働く。そして円盤がかなりの質量を持っているため、円盤の高密度部分がブラックホールを引きつける作用も無視できないほど大きく、それによって不安定性が生じるのである。このシミュレーションではモデルの詳細に関わらず、数値誤差によって円盤の密度分布に偏りが生じてくる。

非軸対称変形モードを追うために、ρ_* を重み付けした密度 $\rho_* := \rho u^t\sqrt{-g}$ として、

$$C_m = \int \rho_* e^{im\phi} d^3x \quad (m = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{4.4.1}$$

という量を定義し、それを正規化した

$$\delta_m = \frac{|C_m|}{C_0} \tag{4.4.2}$$

を考える。δ_0 は軸対称な変形、$\delta_m (m \neq 0)$ はそれぞれ周期 $2\pi/m$ の変形の大きさを表す。時間発展を追跡すると、図 4.1 の通り δ_1 の寄与が他の成分に比べて大きいことが分かる。

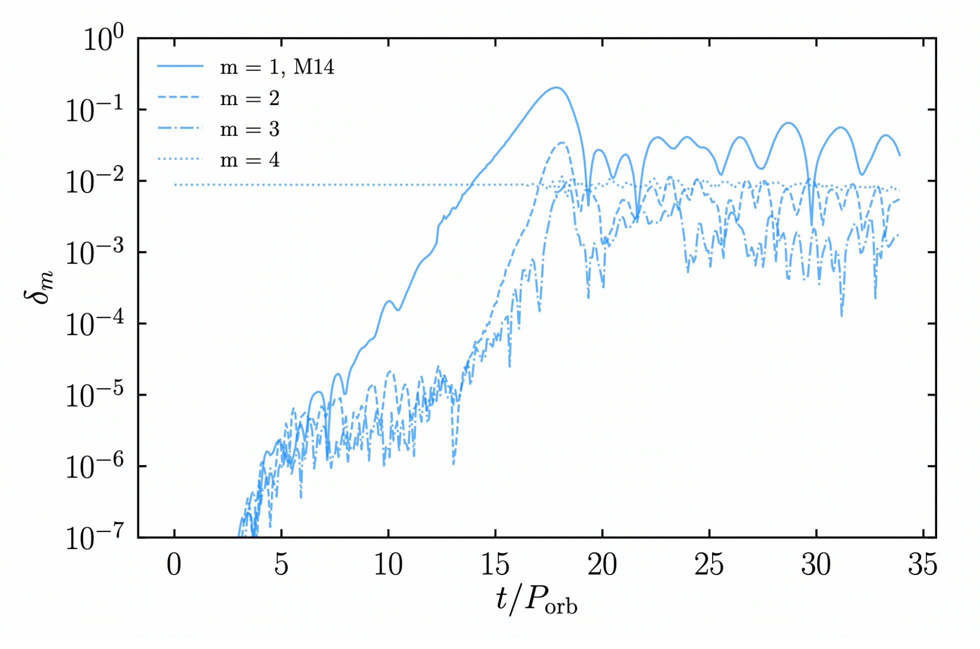


図 4.1　モデル M14 における、式 (4.4.2) で定義した変形モードの時間発展 [91]

このことは、円盤の密度の高い部分が、中心から螺旋状に一本の線が伸びていくような形になっていることを意味する（4.2 参照)。柴田らはこの変形の様子を “one-armed deformation” と呼んでいる。この質量分布が回転することで、四重極成分が時間変化し、重力波を生み出す元になる。

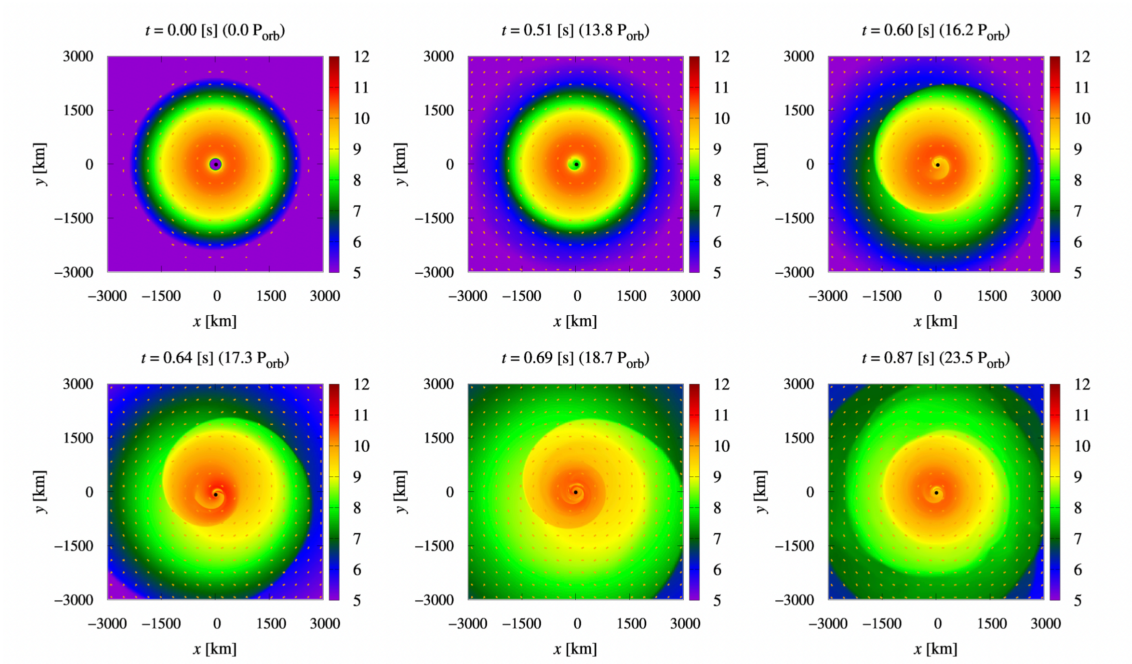


図 4.2　[91] より、円盤変形の時間発展を図示したもの。モデルは M14 である。

なお、実際には円盤のガスはプラズマであるため、磁気乱流を考慮に入れる必要があるものの、今回の場合は大きな問題にはならない。磁気乱流による粘性由来の角運動量輸送のタイムスケールは、円盤の変形のタイムスケールに比べて十分小さいためである。

4.4.2　出てきた重力波の波形

表 4.1 に示した各モデルについて、回転軸の方向から重力波を観測する（つまり傾角 $\iota = 0$）と考え、重力波形を見てみる。以下の図 4.3,4.4,4.5 に示すような形になった。

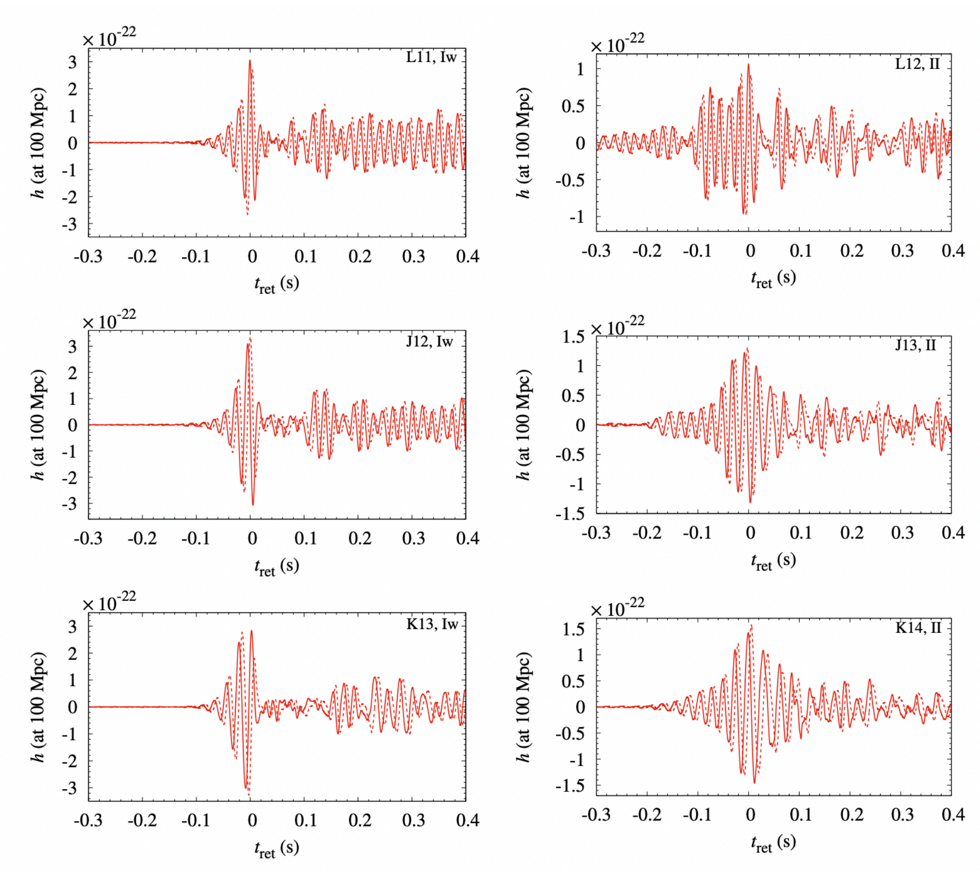


図 4.3　シミュレーションによって得られた重力波波形（1/3）[91]

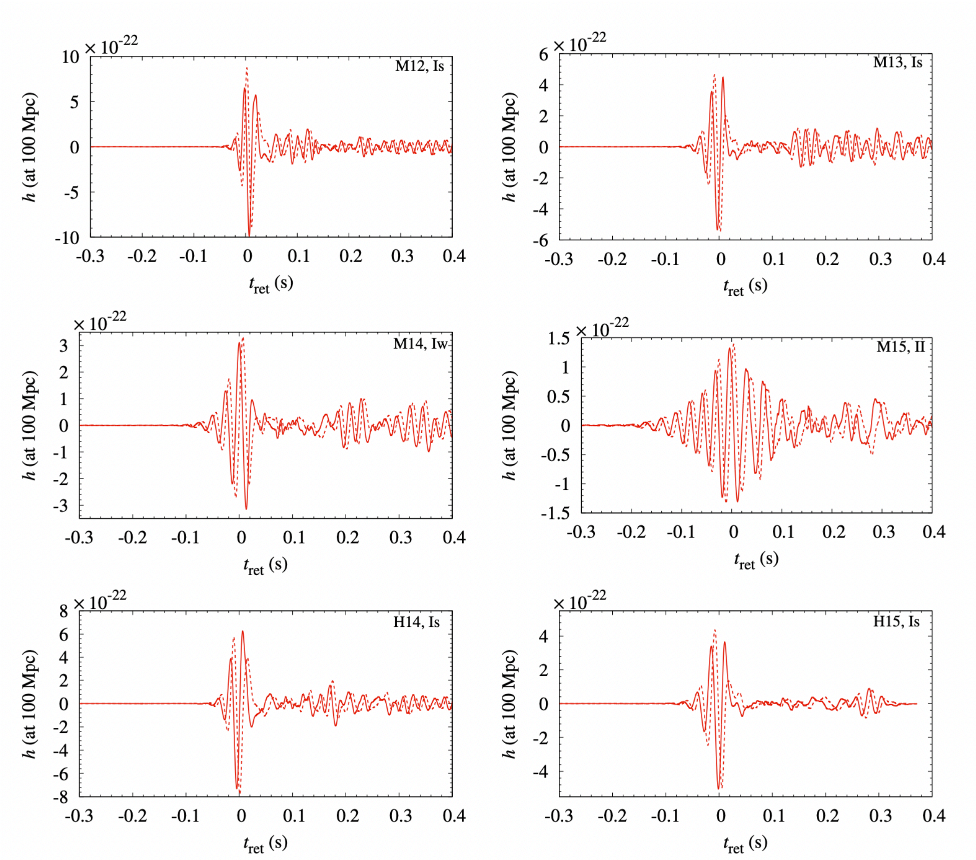


図 4.4　シミュレーションによって得られた重力波波形（2/3）[91]

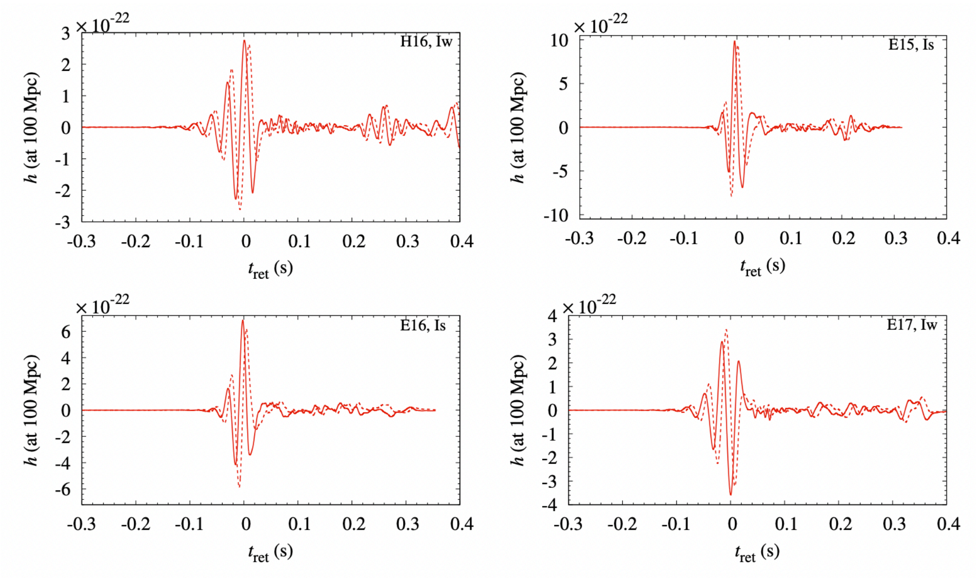


図 4.5　シミュレーションによって得られた重力波波形（3/3）[91]

4.5　波形の分類

4.4.2 節で見た大質量ブラックホール-円盤系由来の重力波波形は大きく分けて、次のような 3 類型に分類することができる。

I 型　大きな振幅のバースト部分に続いて、小さな振幅の準周期的な振動が来るものを I 型と呼ぶ。定量的に述べると、$h_{\max}$ を振幅の最大値として、$h_{\mathrm{crit}} := h_{\max}/e$ を超えるサイクル数 N_{cyc} が 2 以下のものを指す。I 型の中でバーストの長さによってさらに 2 つに分ける。

Is 型　I 型の中でも、バーストが特に短いもの（$N_{\mathrm{cyc}} \leq 1$）を Is 型とする。

Iw 型　I 型で、バーストが数サイクルほど続いて見えるものを Iw 型をする。

II 型　バーストの後も比較的大きな波が続く（$N_{\mathrm{cyc}} > 2$）波形を II 型と分類する。

これらの違いは円盤の質量と大きさによって決まる。図 4.6 に波形タイプと円盤のパラメータとの対応を関係をプロットしたものを示す。図 4.6 の境界線は

$$\frac{M_{\mathrm{disk}}}{M_\odot} = -10 + \frac{c^2 r_{\mathrm{out}}}{G M_{\mathrm{BH},0}}, \tag{4.5.1}$$

$$\frac{M_{\mathrm{disk}}}{M_\odot} = 3 + \frac{c^2 r_{\mathrm{out}}}{G M_{\mathrm{BH},0}}, \tag{4.5.2}$$

である。

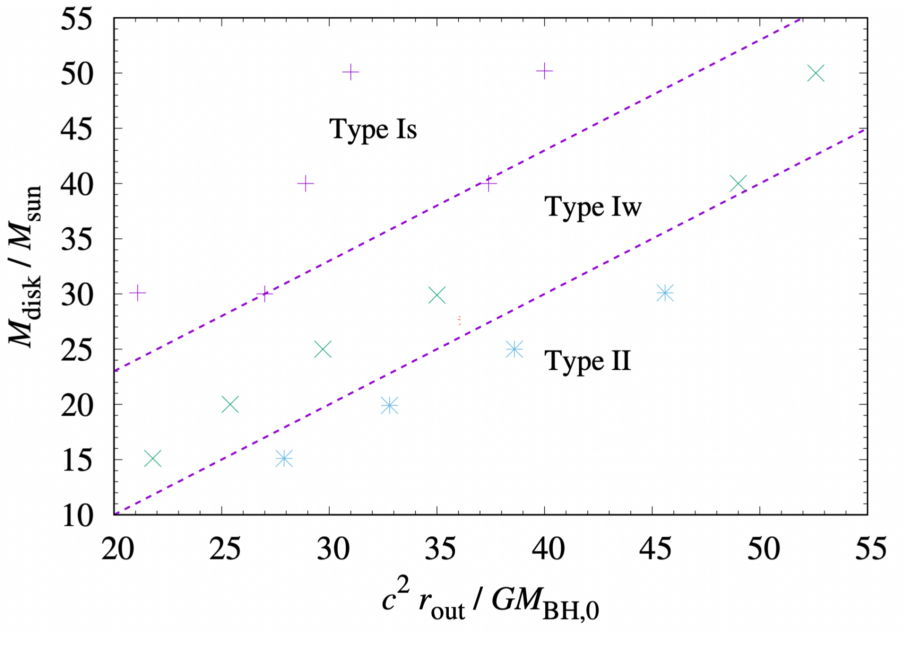


図 4.6　円盤の質量と大きさをプロットし、領域で分割した図。[91] より引用。

さて、これらの分類を実際の観測に当てはめて、連星ブラックホール合体の重力波との類似性、さらには GW190521 に近い波形はどれかという観点から考えてみる。I 型の場合、バースト後の波形は（ノイズの大きさによっては）ノイズに埋もれてしまうため、バースト部分のみだけが程よく見えると予想される。そのた

め、重力波探索の際にバースト部だけが見えた場合、連星ブラックホールの重力波と同じように解釈される可能性がある。また、Is 型とⅡ型は、GW190521 との整合性の観点から見るとバーストのサイクル数が合わない。そのため、GW190521 の代替案として相応しいのは Iw 型ということになる。

4.5.1 重力波の周波数スペクトル

スペクトログラム（周波数スペクトルの時間変動を表した図）を図 4.7,4.8 に示す。

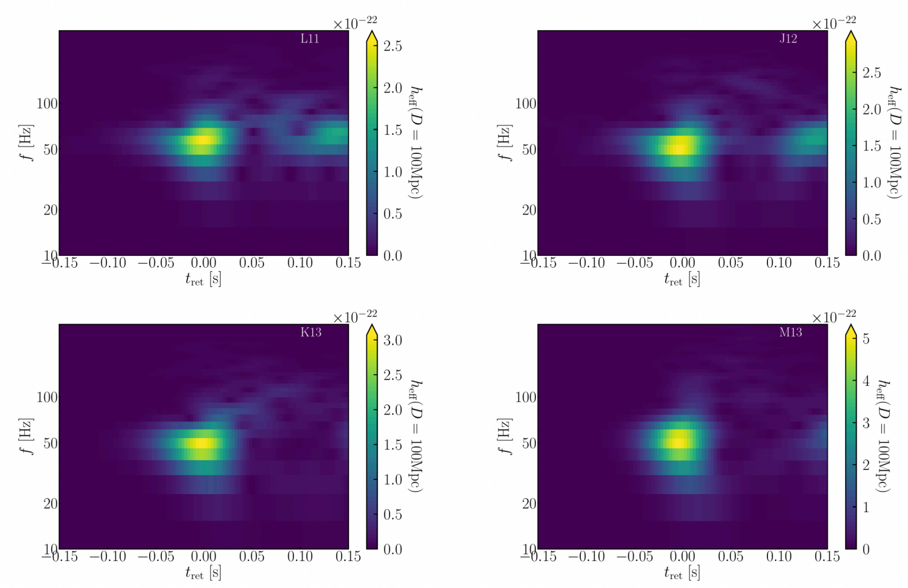


図 4.7　モデル L11, J12, K13,M13 のスペクトログラム。[91] より抜粋

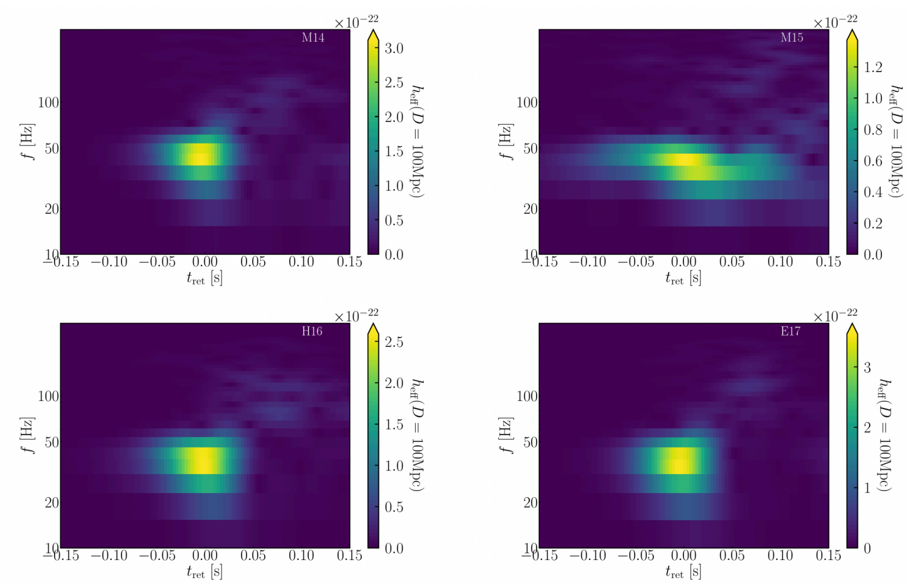


図 4.8　モデル M14,M15,H16,E17 のスペクトログラム。[91] より抜粋

シミュレーションによって出てきた波形の、有効振幅（effective amplitude）を図 4.9 に示す。ここで表示している有効振幅とは、波形のフーリエ変換 $\tilde{h}(f)$ そのものではなく、周波数を掛けた $h_{\rm eff} = |f\tilde{h}(f)|$ である。これは、ノイズ PSD と次元を揃え、波形の強度がノイズの強度に埋もれるかどうかを調べるための処置である。

ブラックホール-円盤系の出す重力波の特徴として、モデルに依らず $h_{\rm eff}$ は $f_{\rm peak} = 40$–50Hz にピークを持つ（このピークの値は 4.2 節で考えたものである）。そして、ピーク周波数から離れると振幅が小さくなっている。これは、連星ブラックホール合体には明らかに見られない特徴である。連星ブラックホール合体で考えた $h_{\rm eff}$ は図 4.10 に示した。連星ブラックホールの有効振幅は、ある周波数までほぼ一定で、それを超えると振幅が小さくなっていく。つまり、10–50Hz の低周波帯を精度良く観測することで、有効振幅のスペクトルが山のようになっているか平坦であるかを判別でき、それによってブラックホール-円盤系と連星ブラックホールの違いを見分けられる可能性がある。将来重力波観測技術が向上し、低周波数領域で高い SNR を出すことができれば、ブラックホール-円盤系と連星ブラックホール合体の重力波を明確に区別できるようになるかもしれない。

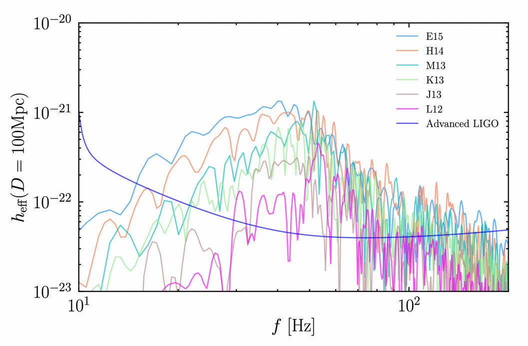


図 4.9　様々なモデルに対して距離を 100Mpc に固定し、それぞれの周波数スペクトルを Advanced LIGO の計画感度と一緒に表した図。[91] より抜粋

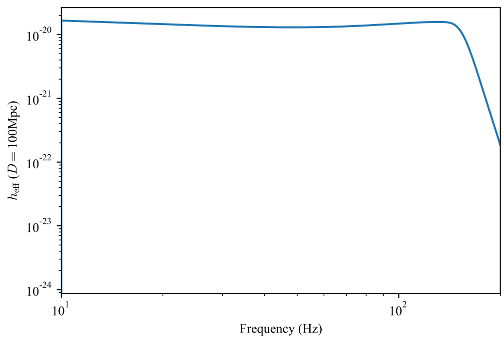


図 4.10　連星ブラックホール合体による重力波波形のスペクトルの例。ここでのパラメータは、GW190521 の `NRSur7dq4` による推定パラメータ $m_1 = 85M_\odot, m_2 = 66M_\odot, \chi_{1\perp} = 0.69, \chi_{2\perp} = 0.73$ を使った。

4.6　電磁対応天体

4.2 節で、ブラックホール-円盤系の成り立ちを高速回転する金属欠乏星に求めた。この高速回転する金属欠乏星の重力崩壊シミュレーション [99] では、円盤形成の段階で外側に向かう流れができることがあり、それが（特に可視光〜赤外線領域で）電磁波を発すると考えられる。よって、もしブラックホール-円盤系が存在するならば電磁波追観測で電磁対応天体（electromagnetic counterpart）が発見される可能性がある。連星ブラックホール合体では電磁波は通常出ないため、この点が 2 つを見分けるポイントの 1 つになる。

円盤質量のうち 10–20 %が、光速の 0.05 倍程度で放出されうる [104, 105] と考えられていて、その運動エネルギーを見積もると

$$E_{\rm kin} \approx 10^{52}\,{\rm erg}\left(\frac{M_{\rm eje}}{5M_\odot}\right)\left(\frac{v_{\rm eje}}{0.05c}\right)^2 \tag{4.6.1}$$

となる。つまり 10^{51}–10^{52}erg（10^{44}–10^{45}J）程度のエネルギーの放出があり、これが 1 年オーダー継続すると 10^{42}–10^{43}erg/s（10^{35}–10^{36}J/s）の光度を持つ。100Mpc の距離にあれば、見かけの等級にして 17–19 等級程度で光ると考えられる。

第 5 章

検出可能性の検証

前章で、大質量ブラックホール-円盤系について述べた。この系は、円盤の非軸対称変形によって重力波を放出する。ブラックホール-円盤系の特筆すべき点は、この系自体が天文学的考察の対象として興味深いだけでなく、放出する重力波の中には CBC 波形に近いものがあるということである。比較的重いブラックホール同士の連星合体とブラックホール-円盤系の重力波波形は（バースト部に限ってみれば）似ており、CBC パイプラインでブラックホール-円盤系が検出される可能性を感じさせる。先行研究 [91] では、GW190521 の解釈が変わる可能性も示唆されていた。本章では、いよいよ本研究の主題である、ブラックホール-円盤系の CBC パイプラインによる検出可能性について論じる。まず、5.1 節で検出可能性を明確に定義し、その後パイプラインの構築を行う（5.3,5.3.5 節)。そして構築したパイプラインを使って探索を試みる（5.4 節)。

5.1　探索過程と検出可能性の定義

まず、重力波の検出可能性について、第 3 章で準備した概念を用いて明確に定義しておく必要がある。重力波イベントの検出とは、

> 「候補イベントがノイズから作り出された」という帰無仮説のもとで、その候補イベントの順位付け統計量を得る確率（P 値）が十分小さい

ということであり、検出可能性を示すには計算によって十分小さい P 値を出せればよい。十分小さいという部分に曖昧さが残ってしまっているが、基準は経験則によって決めるしかないため仕方がない部分である[*1]。GWTC-3 [6] では、「**1 年に 2 回未満**」の誤報率を 1 つの基準として定めており、これを今回の検証の基準に利用する。

今回の解析手順を整理したものを以下に示す。ベースとなる重力波探索の方法は 3.9 節で述べたものであるが、今回は単一の検出器しか考えず、入力データもノイズも人工的に生成したもののみを入れるため、省略・修正される過程が出てくる。

1. 解析的な PSD を前もって用意し、ガウスノイズをその PSD に従って生成する。そのノイズにモデル波形を混ぜる。
2. 解析的な PSD に従ってテンプレートバンクを作成する。

[*1] この点は分野によっても慣習が異なってくる。例えば素粒子物理学では、5σ 以上の統計有意性を出して初めて新現象の発見だとされる。

3. テンプレートバンクを使って、入力データにマッチドフィルターを掛け、SNR を計算する。SNR が最大を取った点をトリガーとして採用する[*2]。
4. トリガーでの χ^2 の値を計算する。
5. 得られた SNR と χ^2 の値を使って、RSNR$\hat{\rho}$ を計算する。
6. （順位付け統計量 RSNR$\hat{\rho}$ の関数として）誤報率を計算する。信号がない状態での検出器のノイズは、PSD から作ることができるのでそれを使う。

これを基に検出パイプラインを構築する。

5.2 パイプラインの構築

5.2.1 使用する波形テンプレート

CBC 波形のテンプレートモデルは多数提案されており、`IMRPhenom` シリーズは現象論的[*3]な波形によってインスパイラル・合体・リングダウン段階を全て連続的な波形で表現することを目指した波形モデル群である。今回の検証で考えるテンプレート波形として、`IMRPhenomD` [106, 107] を使用している。このテンプレートは、CBC 波形をインスパイラル段階からリングダウンに至るまで包括的に扱えるため採用した。なお、`IMRPhenomD` は軌道面の歳差運動を扱うことはできないが、今回は軌道面の歳差を考慮しないため問題ない。

5.2.2 ノイズの生成

定常ガウスノイズの生成は、パワースペクトル密度（PSD）を使って行う。なお、今回使用するノイズは周波数領域で生成されるものであり、ガウス性はあくまで時間領域では成り立つとは限らないことに注意を要する。

まずノイズの定常性とは、時間領域で考えたときに特別な時刻というものが存在せず、各時刻の相関を取るとそれは時刻の差にのみ依存することを指す。つまり定常なノイズとは、何らかの関数 C を用いて

$$\langle n(t)n(t')\rangle = C(t-t') \tag{5.2.1}$$

と書けるような状況を指す語である。このような条件は、観測の現場において一般に成り立つ条件では到底ない（例えば、交流電源によるノイズなどが介在する）。しかしながら、重力波が通過するわずかな時間程度であれば、近似的に成り立つとしても大きな問題はないため、この定常性を仮定した上で議論を進めることが多い。この式をフーリエ変換すると、周波数領域での定常ノイズ $\tilde{n}(f)$ についての条件を与えることができる。

$$\langle \tilde{n}^*(f)\tilde{n}(f')\rangle = \delta(f-f')P(f) = \frac{1}{2}\delta(f-f')P_{\rm one}(f) \tag{5.2.2}$$

を満たし、逆にこの関係を満たすようにノイズ $\tilde{n}$ を生成すればそれは定常ノイズとなる。この式は、ノイズの各周波数成分の間に相関がないことを示している。

[*2] 閾値を定めず、最大となる点を取るのは、入力するデータに人為的に検出を期待する波形を混ぜて作っているからである。今回の場合、検出されるべき点が 1 つしかなく、ノイズより有意でないと判断されるような波形であれば考える意味がないのである。実際の観測では、真の信号が何個入力データの中にあるかは分からない。

[*3] ここで言う「現象論的（Phenomenological）」とは、実際に起きる物理現象に合うように連続的な波形を構成した、という程度の意味である。

一方、ガウスノイズとは、確率分布をガウス分布とし、各点において確率変数としてノイズの値が割り当てられるようなノイズのことである。ここに、このガウス性を課すためには、平均は 0 とし、分散をこの式を使って与えてやれば良い。デルタ関数は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f)df = 1 \tag{5.2.3}$$

という性質を満たし、df は周波数の次元を持っていることに注意すると、デルタ関数はその逆数の次元を持っていなければ右辺と釣り合わない。上式を離散化するときは、そのことに留意して

$$|\tilde{n}(f)|^2 = \frac{1}{\Delta f}P(f) = \frac{1}{2\Delta f}P_{\rm one}(f) \tag{5.2.4}$$

周波数領域のノイズ $\tilde{n}(f)$ は一般に複素数値を取るが、実部と虚部は等価である、すなわち $\mathrm{Re}\{\tilde{n}(f)\}^2 = \mathrm{Im}\{\tilde{n}(f)\}^2$ という設定にすれば

$$\mathrm{Re}\{\tilde{n}(f)\}^2 = \mathrm{Im}\{\tilde{n}(f)\}^2 = \frac{1}{2\Delta f}P(f) = \frac{1}{4\Delta f}P_{\rm one}(f) \tag{5.2.5}$$

となり、これを周波数領域における分散だと考えればよい。

本研究では、平均 0・分散 $P(f)/2$ のガウス分布に従って周波数領域でノイズを生成し、PSD には、実際の検出器に対応する解析的な PSD・`aLIGOZeroDetHighPower`*4 [108] を用いる。これは Advanced LIGO において、反射鏡によるレーザー離調（デチューニング）が無く、高出力のレーザーを使用しているときの理想的な PSD である。この PSD は Advanced LIGO の予測感度の中で、最も技術的な障害が少なく高い感度を出したときに予想されるものである。本研究では余計なノイズを極力考えないためにこれを使用することにした。

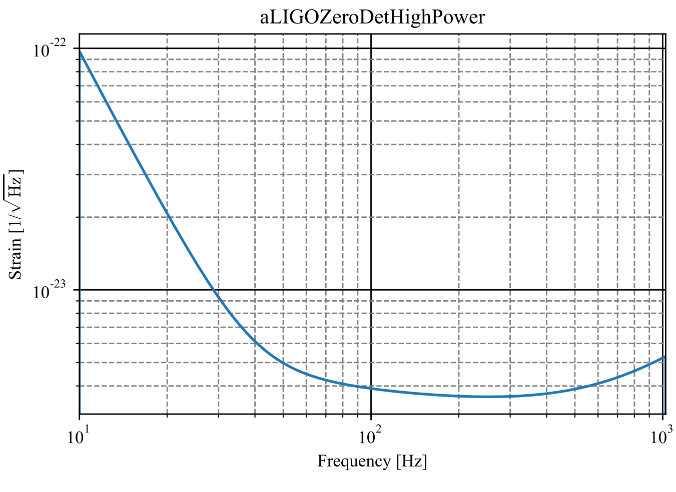


図 5.1　今回使用する解析的な PSD、`aLIGOZeroDetHighPower`。$\sqrt{S_{\rm one}(f)}$ をプロットしていることに注意。

*4 この PSD は片側 PSD であることに注意。

5.2.3　テンプレートバンクの作成

3.8 で述べた、sbank を用いてテンプレートバンクを作成した。今回、生成するパラメータの探索範囲は、2 通り用意した。

1.
   - ブラックホール質量 m_1, m_2: $[10M_\odot, 200M_\odot]$
   - 無次元スピン角運動量 χ_1, χ_2: $[-0.99, 0.99]$
     但し、スピンと軌道角運動量は並行であり、軌道面に直交していない角運動量は持たない（aligned-spin）[*5]
   - 使用する最低周波数 $f_{\rm low}$:10Hz
   - 要求最小マッチ:0.97
2.
   - ブラックホール質量 m_1, m_2: $[15M_\odot, 150M_\odot]$
     但し、全質量は $40M_\odot \leq m_1 + m_2$ に制限
   - 無次元スピン角運動量 χ_1, χ_2: $[-0.99, 0.99]$
     但し、スピンと軌道角運動量は並行であり、軌道面に直交していない角運動量は持たない（aligned-spin）
   - 使用する最低周波数 $f_{\rm low}$:10Hz
   - 要求最小マッチ:0.97

前者の設定 1 で作ったテンプレートバンクを図 5.2、後者の設定 2 で作ったテンプレートバンクを図 5.3 に図示した。

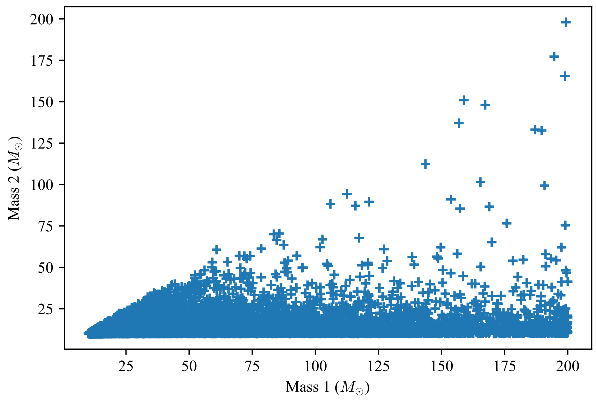


図 5.2　設定 1 のテンプレートバンクで (M_1, M_2) 平面への射影を取ったもの

2 つのテンプレートバンクのテンプレート数を表 5.1 に記した。テンプレート数を比較すると 3 倍以上の開きがある。図 5.2 と 5.3 で分布を比較すると、小質量帯に集中している。これは、全質量が小さいほどテンプレートの長さが長くなることに由来している。

インスパイラル波形において、カットオフ周波数に当たる時刻を $t_{\rm cutoff}$、合体時刻を $t_{\rm coal}$ とし、テンプレー

[*5] この仮定のもとでは軌道面の歳差は起きない。詳しくは 2.4.1 節を参照。

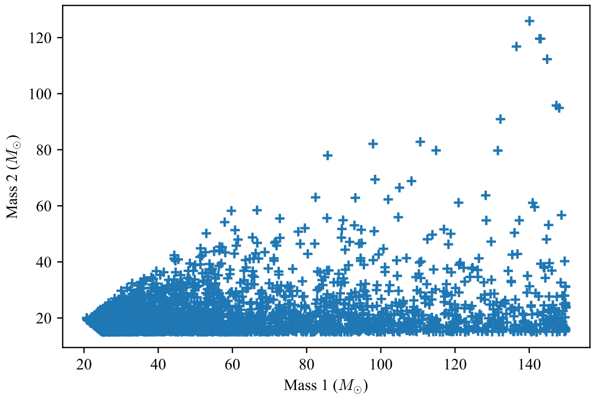


図 5.3　設定 2 のテンプレートバンクで (M_1, M_2) 平面への射影を取ったもの

	設定 1	設定 2
テンプレート数	13961	2912

表 5.1　テンプレート数

トの長さ $\tau := t_{\rm cutoff} - t_{\rm coal}$ を定義すると、(2.2.3) より

$$f_{\rm lower} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{256}\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{3}{8}}\left(\frac{G\mathcal{M}_c}{c^3}\right)^{-\frac{5}{8}} \tag{5.2.6}$$

これにより、テンプレートの長さは、

$$\tau = \frac{5}{256}\left(\frac{1}{\pi f_{\rm low}}\right)^{\frac{8}{3}}\left(\frac{c^3}{G\mathcal{M}_c}\right)^{\frac{5}{3}} \tag{5.2.7}$$

と計算できる。これを見ると、$\mathcal{M}$ が大きいほど τ は小さくなることが分かる。

計算コストが 3 倍以上変わるため、小質量のテンプレートを使用するかどうかを考える必要がある。今回、テンプレートバンクを生成する範囲を決定するために、テンプレートバンク作成前にパラメータの変動幅を一定にした簡易的な予備探索を行ったが、全質量は $[150M_\odot, 300M_\odot]$ の範囲に収まっていた。また、全質量が小さい波形はブラックホール-円盤系由来の波形とは形状が明らかに異なっており、今回は設定 2 のテンプレートバンクを使用することにした。

5.2.4　用意したデータ

今回計算に使用したモデルとその波形分類（4.5 節参照）を表 5.2 に纏めた。使用するシミュレーション結果の元データは [91] の著者にご提供いただいた。

ブラックホール質量を $M_{\rm BH} = 50M_{\odot}$、距離を $D = 100$Mpc、傾角 $\iota = 0$ のときのモデル波形をプラスモードとクロスモードに分けて図 5.9–5.17 に図示した。

モデル	E15	E16	E17	H14	H15	H16	J12	J13
分類	Is	Is	Iw	Is	Is	Iw	Iw	II

モデル	K13	K14	L11	L12	M12	M13	M14	M15
分類	Iw	II	Iw	II	Is	Is	Iw	II

表 5.2　計算に使用したモデルとその波形分類

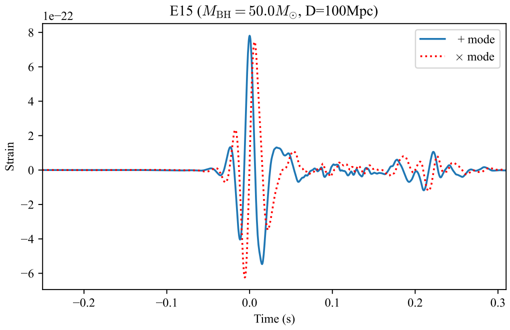


図 5.4　モデル波形（E15）

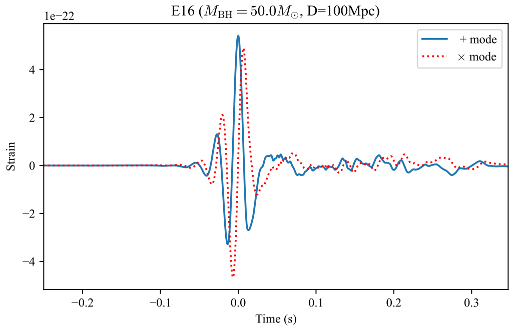


図 5.5　モデル波形（E16）

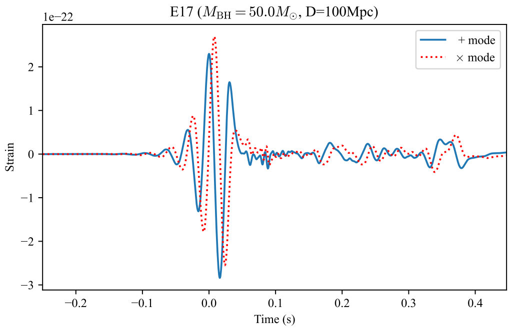


図 5.6　モデル波形（E17）

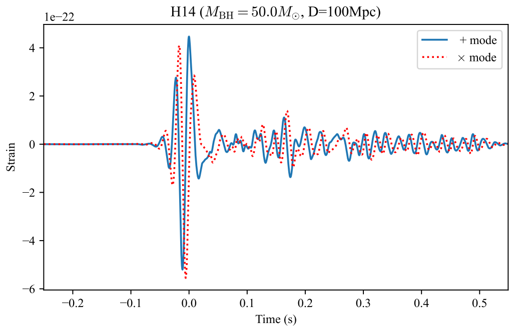


図 5.7　モデル波形（H14）

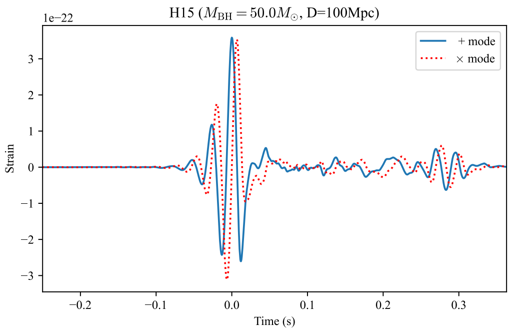


図 5.8　モデル波形（H15）

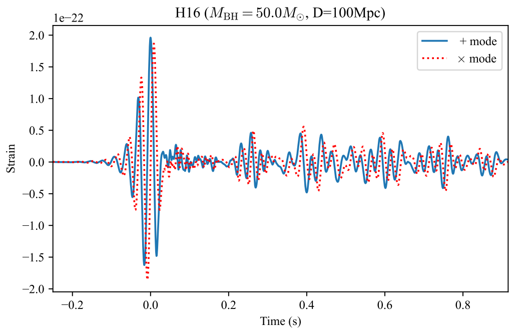


図 5.9　モデル波形（H16）

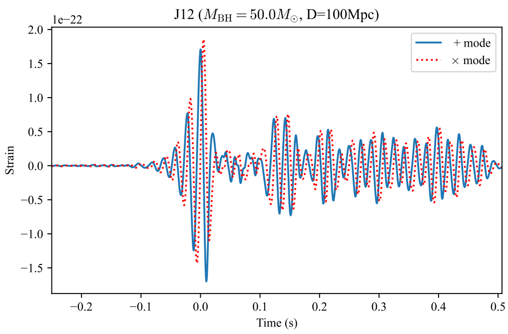


図 5.10　モデル波形（J12）

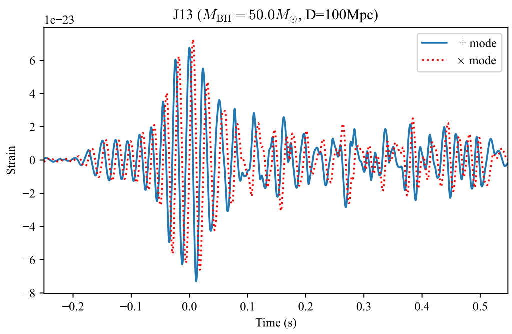


図 5.11　モデル波形（J13）

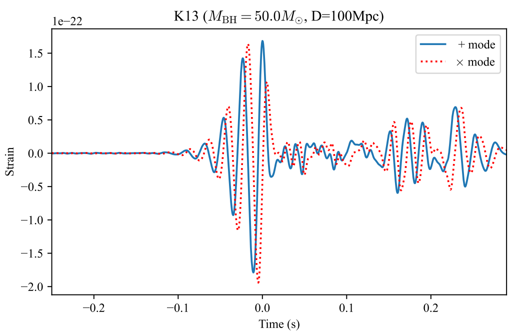


図 5.12　モデル波形（K13）

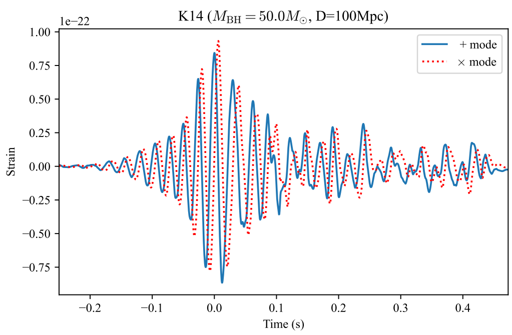


図 5.13　モデル波形（K14）

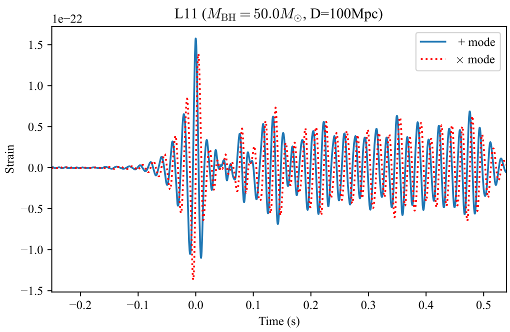


図 5.14　モデル波形（L11）

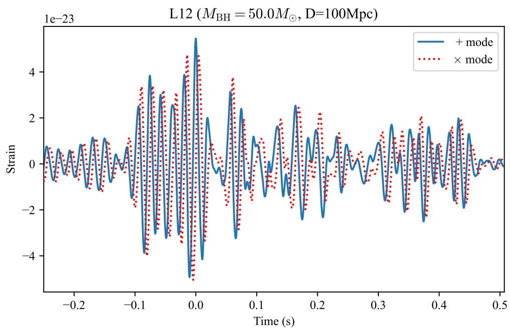


図 5.15　モデル波形（L12）

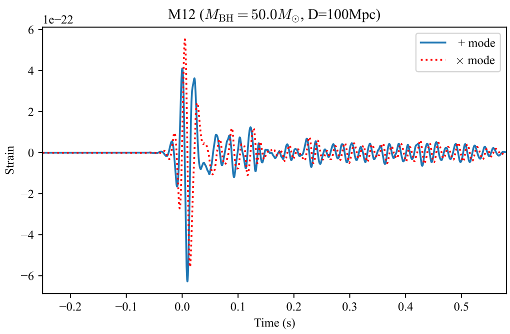


図 5.16　モデル波形（M12）

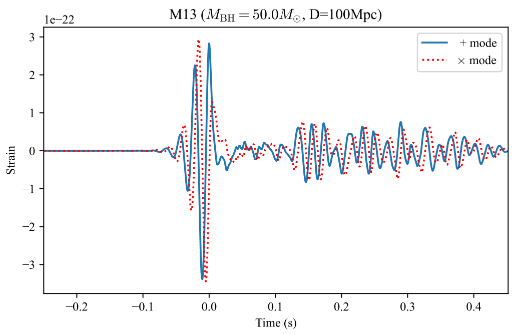


図 5.17　モデル波形（M13）

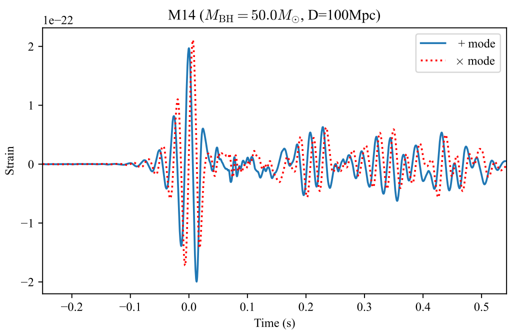


図 5.18　モデル波形（M14）

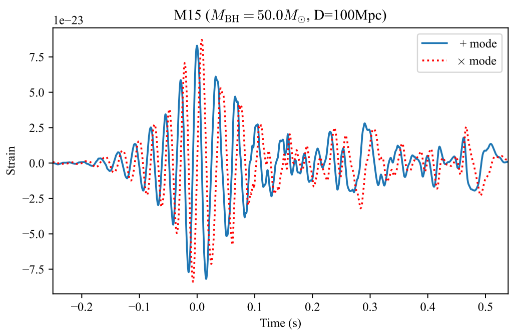


図 5.19　モデル波形（M15）

なお、用意したモデル波形は、プラスモードとクロスモードに別れており、入力データとして扱うには検出器を通した出力を考えなければならない。検出器セットアップについて、赤経 α、赤緯 δ、偏光角 ψ を与えてアンテナパターン関数 $F_+, F_\times$ の値を計算する必要がある。このアンテナパターン関数を使って、得られる検出器からの出力はプラスモード h_+ とクロスモード $h_\times$ の線形結合

$$h(t) = F_+(\alpha, \delta, \psi)h_+(t) + F_\times(\alpha, \delta, \psi)h_\times(t) \tag{5.2.8}$$

である。この $h(t)$ が「モデル波形」として扱われる。本研究では、2.3.2 節の最後で述べたような、検出器の腕が直交するようなセットアップのもとで、検出器の真上から重力波が $\psi = 0$ で到来する場合を考える。つまり、

$$F_+ = 1, F_\times = 0 \tag{5.2.9}$$

である。重力波検出器は真上からの入射に対して最も感度が良く、理論的な検出可能性を考える上でこれは理想的なセットアップであると言える。

また、元のシミュレーションデータは、観測者からの距離 D を固定している。距離を変えたときの振る舞いも評価するために、今回の研究では波形のスケーリングを試みた。距離 D のスケーリングは、単純に波形の振幅を $1/D$ 倍させれば良い。

5.2.5 データの作成

前節で用意したモデル波形にノイズを加えることで入力データとする。入力データを作成する際のプロファイルは次の通り。

- サンプリングレート f_s:2048Hz
  実際の観測では 4096Hz で測定しているが、処理の過程でダウンサンプリングを行うことを多い。本研究ではダウンサンプリングは行わないので、予め低めのサンプリングレートで考えている。
- 最低周波数 f_{low}:10Hz
  この値は地上検出器の限界程度である。
- 最高周波数 f_{high}:1024Hz
  これはサンプリングレートから計算できるナイキスト周波数 $f_{\mathrm{Nyq}} = f_s/2$ である。

データは、時間長 L が $L = 60$ 秒になるように作成する。つまりデータ点の個数 N は $N = f_{\mathrm{Nyq}}L = 61440$ 個である。なお、マッチドフィルターは周波数領域で行う計算であるため、基本的に周波数領域でデータを扱う。5.2.2 節で述べたやり方で、周波数領域でのノイズを生成する。モデル波形は時間領域で 30 秒ほど後ろにタイムシフトし、それをフーリエ変換したものをノイズに混ぜる。こうして作成した入力データを解析パイプラインに掛ける。モデル波形を検出するときには、30 秒前後の部分で有意な順位付け統計量を得る筈である。

5.3 PyCBC による実装

5.3.1 テンプレート生成

テンプレートの生成には、周波数領域でのテンプレート生成を行う `get_fd_waveform` 関数を用いている。今回の検証では、時間領域で信号を見るときを除いて周波数領域で計算を完結させる。

5.3.2　SNR

PyCBC の matched_filter_core 関数は、その名の通りマッチドフィルターを計算する関数である。(3.4.22) を離散化したもの

$$\rho(t) = 4\,\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{N}\frac{\tilde{x}_j\tilde{\tilde{h}}_j^*}{S_{\rm one}(f)}e^{2\pi i f_j t}\Delta f \tag{5.3.1}$$

を求める。

信号 s とテンプレート h に対する式 (3.4.15)

$$(s|h) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{s}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(f)}df = 2\int_{0}^{\infty}\frac{\tilde{s}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_{\rm one}(f)}df = 4\,\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty}\frac{\tilde{s}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_{\rm one}(f)}df \tag{5.3.2}$$

を離散化したものを

$$(s|h)_{\rm disc} = 4\,\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{N}\frac{\tilde{s}_j\tilde{h}_j^*}{S_{\rm one}[j]}\Delta f \tag{5.3.3}$$

としておく。

matched_filter_core 関数は、

$$\rho_{\rm unnormalized}(t) := 4\,\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{N}\frac{\tilde{x}_j\tilde{h}_j^*}{S_{\rm one}(f)}e^{2\pi i f_j t}\Delta f \tag{5.3.4}$$

とテンプレートに対する規格化因子

$$\sigma_N = \frac{1}{\sqrt{(h|h)_{\rm disc}}} = \sqrt{\frac{1}{4\,\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{N}\frac{|\tilde{h}_j|^2}{S_{one}[j]}\Delta f}} \tag{5.3.5}$$

に分けて計算している。実際の出力は

$$\texttt{snr} = \sum_{j=0}^{N}\frac{\tilde{s}_j\tilde{h}_j^*}{S_{\rm one}[j]} \tag{5.3.6}$$

$$\texttt{norm} = \frac{4\Delta f}{\sqrt{(h|h)_{\rm disc}}} \tag{5.3.7}$$

であるが、

$$\texttt{snr}\times\texttt{norm} = \rho_{\rm unnormalized}(t)\times\sigma_N = \rho(t) \tag{5.3.8}$$

を計算することでテンプレートを規格化した上でのマッチドフィルターの計算になる。

5.3.3　カイ二乗統計量

マッチドフィルターによって SNR を計算した後はカイ二乗統計量を計算する。カイ二乗の計算には power_chisq_bins 関数と power_chisq_from_precomputed 関数を用いた。power_chisq_bins 関数は、3.5

節で考えた周波数分割を行う際、与えられたテンプレートとビン数 p に対してどの周波数で分割するかを返す関数である。今回の検証では周波数ビン数は $p = 16$ に設定する。`power_chisq_from_precomputed` 関数は、先程計算した SNR（の時系列データ）と周波数分割点を引数として、カイ二乗統計量を計算する関数である。この関数は、SNR の計算同様時刻をずらしたテンプレートそれぞれについて計算を行い、それをまとめて出力するため、返り値として得られるのは「カイ二乗統計量の時系列データ」になる。

5.3.4　RSNR

順位付け統計量として用いる Reweighted SNR（RSNR）は、`pycbc.events.ranking` モジュールに含まれる `newsnr` 関数に SNR とカイ二乗統計量を与えて計算する。

5.3.5　パイプラインの動作確認

ブラックホール-円盤系由来の波形に対する検出可能性の検証を行う前に、自作したパイプラインが簡単な重力波信号を検出できるかどうかを調べておく。ノイズに、GW190521 のパラメータ推定値 $m_1 = 85M_\odot, m_2 = 66M_\odot, \chi_{1\perp} = 0.69, \chi_{2\perp} = 0.73, D_L = 5.3\mathrm{Gpc}$ を使って `IMRPhenomD` で生成した重力波信号を加算し、それを入力データとして探索を行った。探索の結果、最適とされたテンプレートは $m_1 = 85.506M_\odot, m_2 = 55.612M_\odot, \chi_1 = 0.5139, \chi_2 = 0.8082$、RSNR は 14.03 という値を得た。

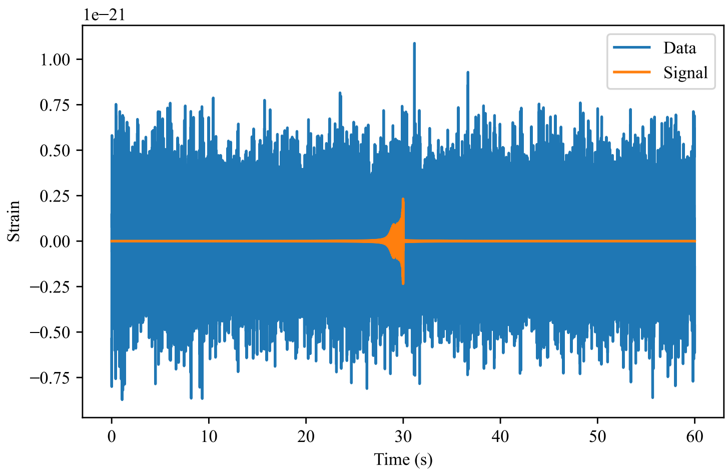


図 5.20　パイプラインのテストに用いた波形（“Data”）と、その中にある重力波信号（“Signal”）

マッチした時刻付近での波形やスペクトログラムを図 5.21–5.23 に示す。

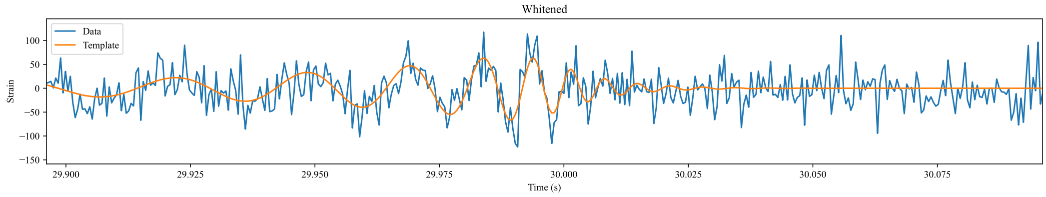


図 5.21　ホワイトニングした入力データと最適マッチと判断されたテンプレート

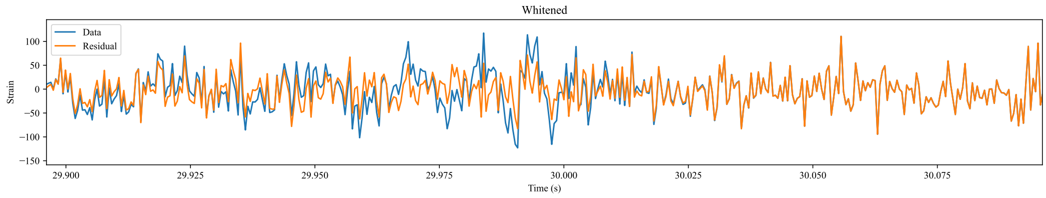


図 5.22　ホワイトニングした入力データと残差 (“Residual”)

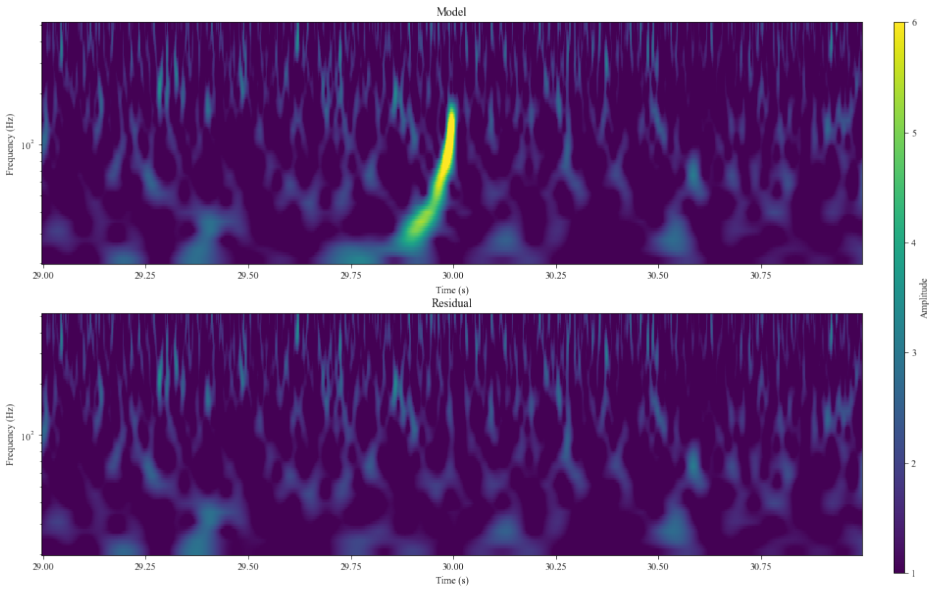


図 5.23　パイプラインテストでのスペクトログラム。上段が入力データ、下段が残差

特に、図 5.23 を見ると、入力データから最適マッチのテンプレートを引き去ると綺麗にノイズ同様の状態になることが分かる。このことから、パイプラインは正常に機能していることが確認できる。

5.3.6　バックグラウンド推定

誤報率の計算に必要なバックグラウンド RSNR の分布を推定する。手順としては、ノイズのみを入力データとし、SNRρ,χ^2,RSNR$\hat{\rho}$ の計算を行う。1/32（=0.03125）秒毎に[*6]SNR の値に依らずトリガーを取り、そのトリガーの持つ SNR と RSNR の分布を調べる。以下に、バックグラウンド SNR とバックグラウンド RSNR の分布を示す。

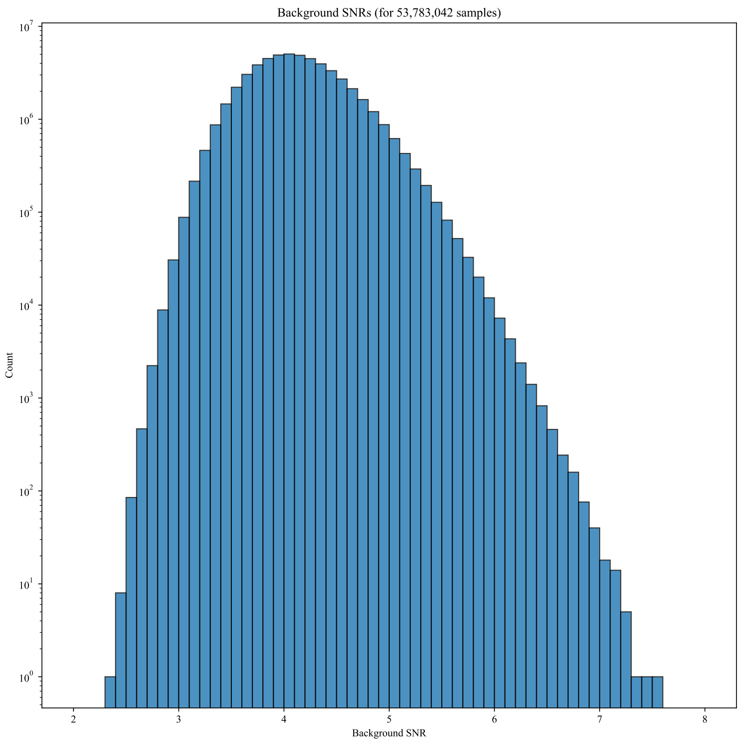


図 5.24　バックグラウンド SNR の分布

図 5.25 に示したバックグラウンド RSNR 分布は、実際に生成した大量のノイズデータに対して検出パイプラインを使用して得た結果である。しかしながらこれではデータ数が不十分であり、高い RSNR のデータが入っていないのだが、計算コストの都合上限界がある。そこで分布を対数グラフの上でプロットし直し、高い RSNR の値まで外挿することで、使用したノイズデータの時間（今回は 0.053 年分）で出てくる回数を計算する。このようにして得た RSNR の分布を使って誤報率を推定する（図 5.26）。これを用いて候補イベントの RSNR から誤報率の推定ができる。先に述べた「1 年に 2 回未満」という基準を照らし合わせると、RSNR にして 8 程度の値に相当することが推測される。

[*6] サンプリングレートが 2 の冪乗であることに合わせて、宇宙物理的な重力波が相関を持たないと考えられている 10 ミリ秒よりも十分大きな間隔を取るように値を定めている。

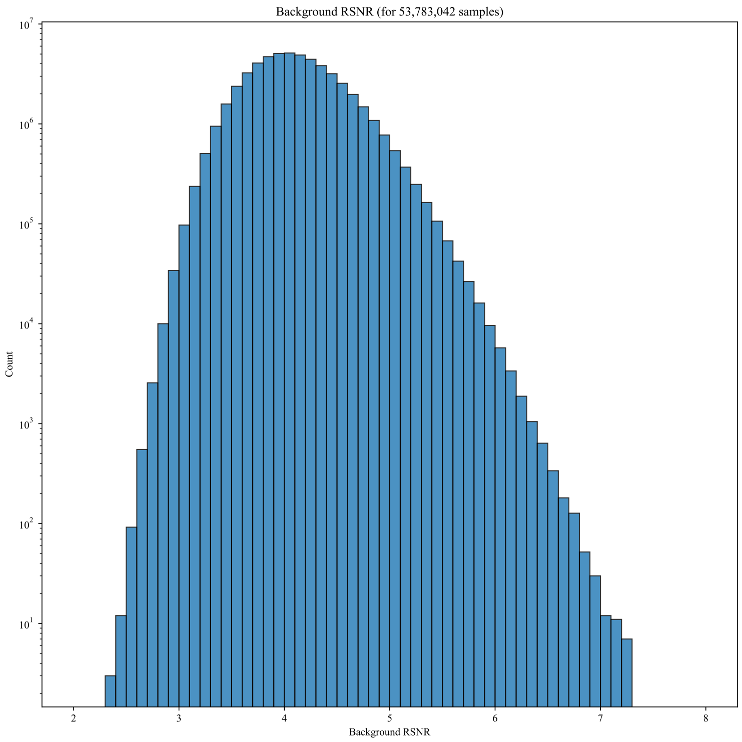


図 5.25　バックグラウンド RSNR の分布

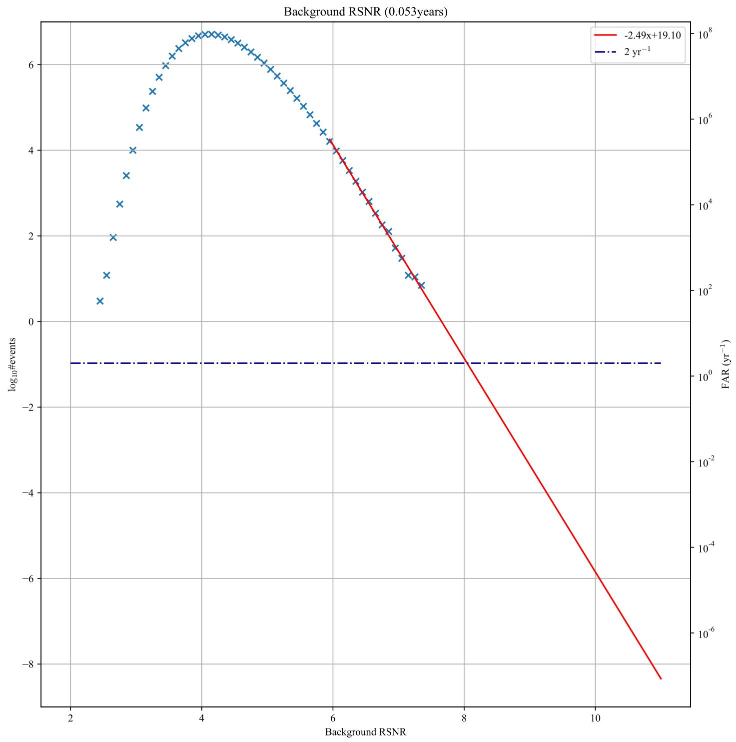


図 5.26　バックグラウンド分布を片対数グラフの上で外挿したもの。左縦軸はイベント数の常用対数を取ったスケール、右縦軸はそのイベント数に対応する 1 年当たりの誤報率である。赤い実線は外挿に使った直線、紫の一点鎖線は 1 年に 2 回の誤報率を表す。

5.4 探索

この節では、いよいよ前節まで準備したパイプラインとデータを使って探索を行っていく。

5.4.1 距離のスケーリング

それぞれのモデル波形を $10\mathrm{Mpc} \leq D \leq 200\mathrm{Mpc}$ の範囲において、10Mpc 刻みでスケーリングさせ、それをノイズに混ぜたデータを探索パイプラインに掛けた。SNR と RSNR、カイ二乗統計量の結果を図 5.27–5.29, 図 5.30–5.32, 図 5.33–5.35 に示す。また、最も高い RSNR を出した距離とそれに対する誤報率、最適と判断されたテンプレートを表 5.3 と 5.4 に記す。5.1 節で述べた、「1 年に 2 回未満」という誤報率の基準から判断すると、検出の可能性があるのは Is 型の全てと、Iw 型の K13,M14 である。

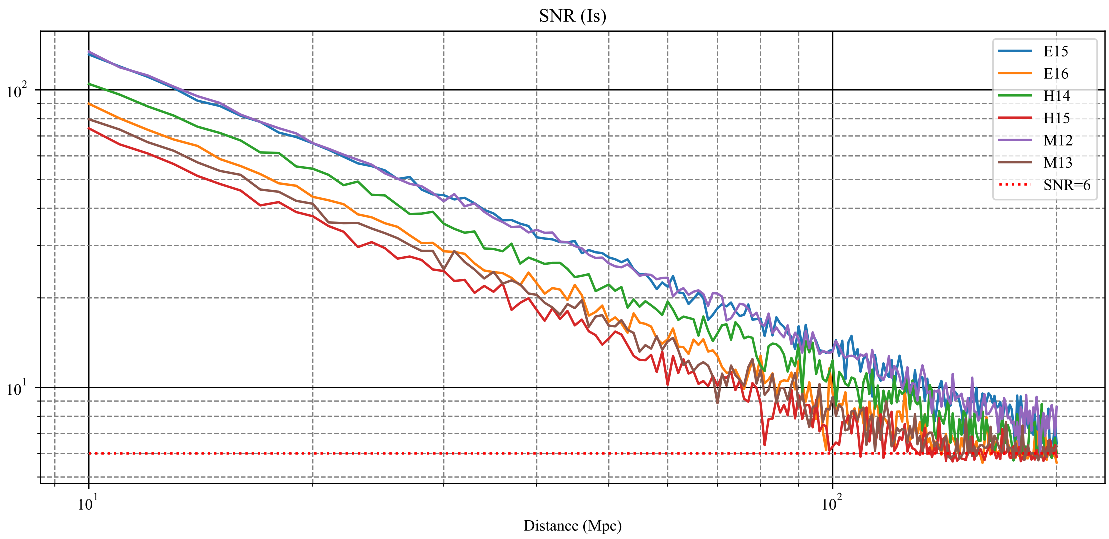


図 5.27　距離に対する SNR の振る舞い（Is 型）

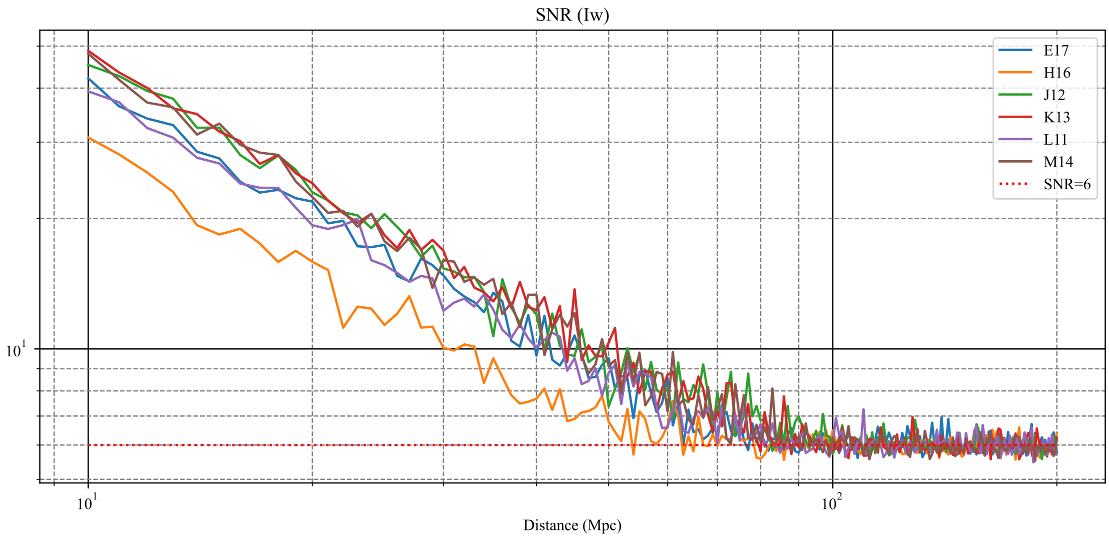


図 5.28　距離に対する SNR の振る舞い（Iw 型）

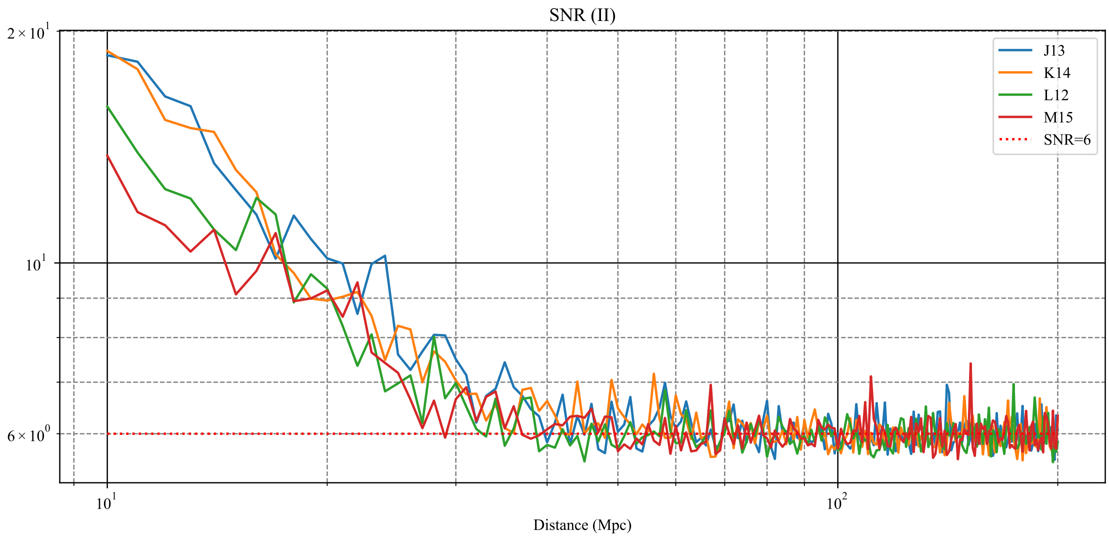


図 5.29　距離に対する SNR の振る舞い（II 型）

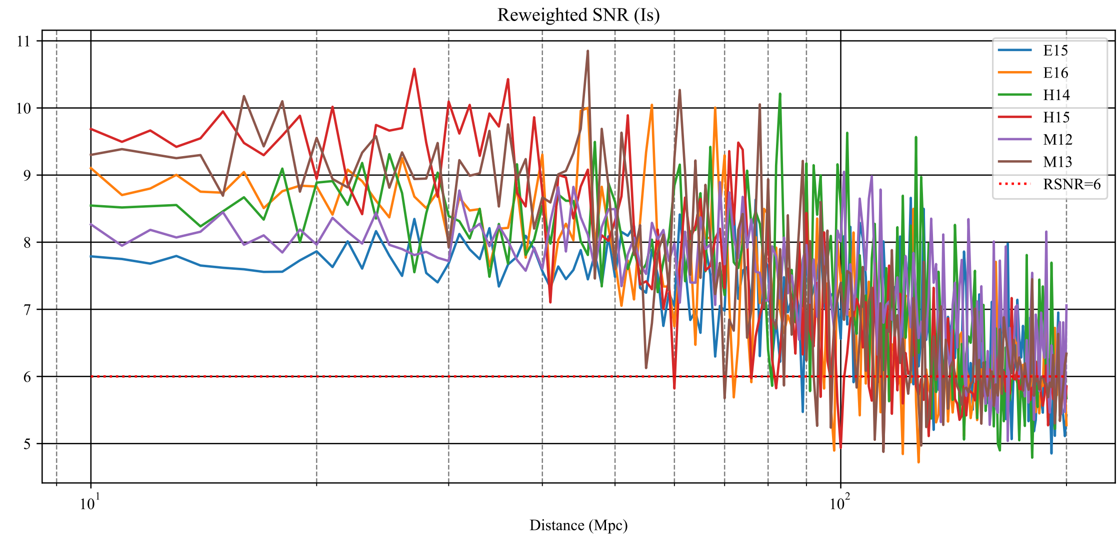


図 5.30　距離に対する RSNR の振る舞い（Is 型）

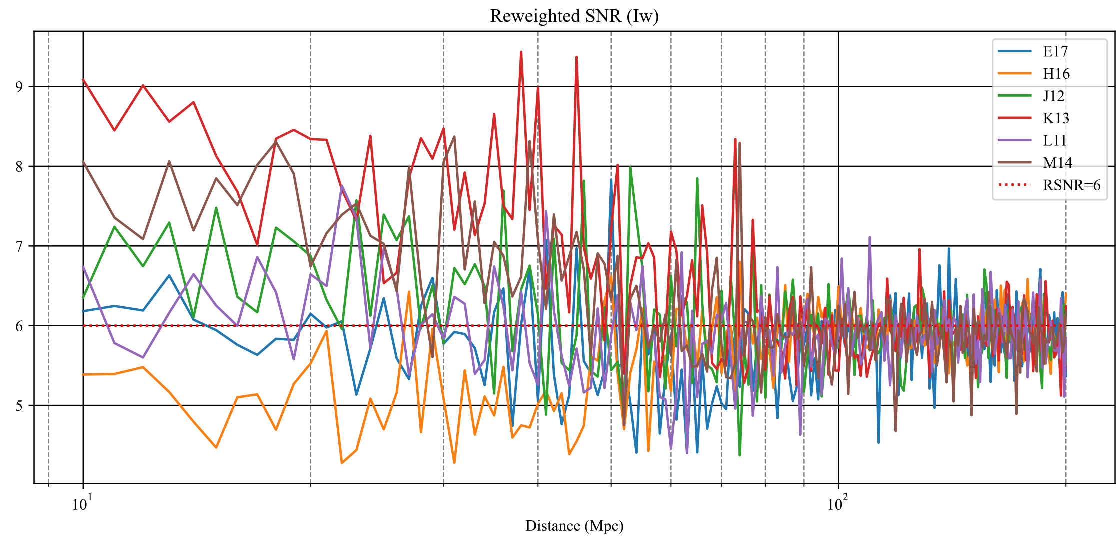


図 5.31　距離に対する RSNR の振る舞い（Iw 型）

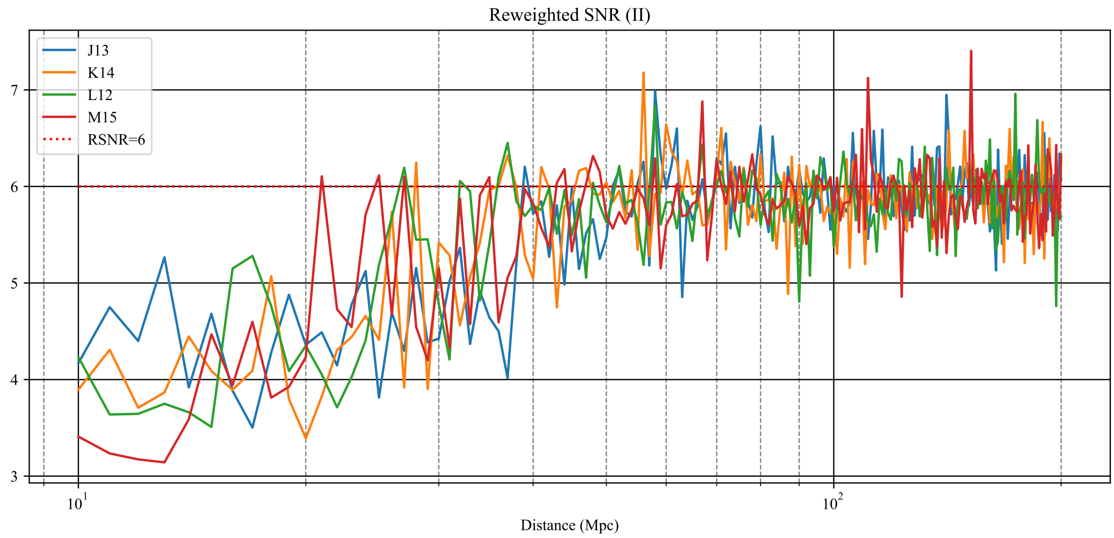


図 5.32　距離に対する RSNR の振る舞い（II 型）

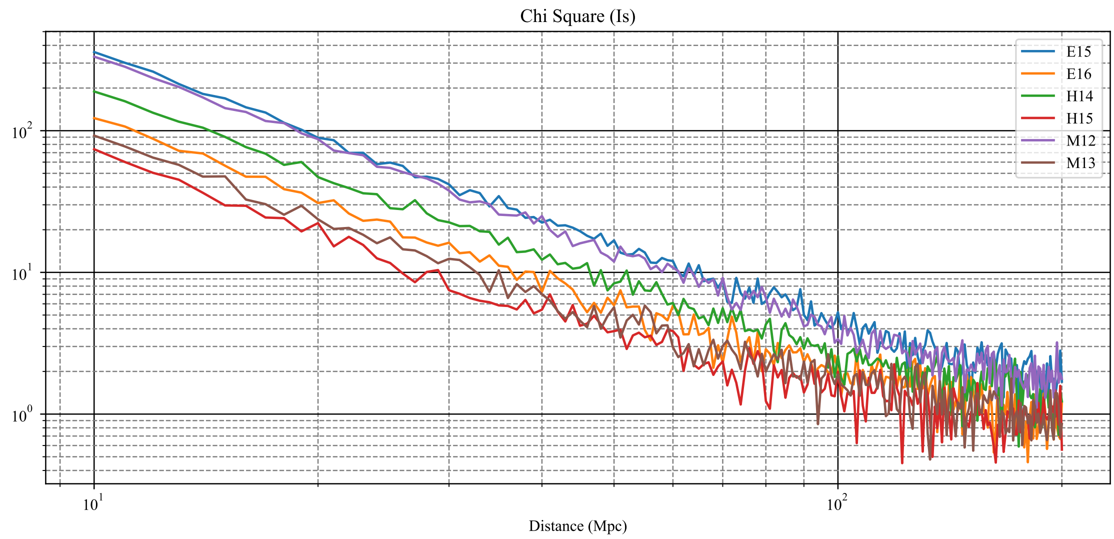


図 5.33　距離に対するカイ二乗統計量の振る舞い（Is 型）

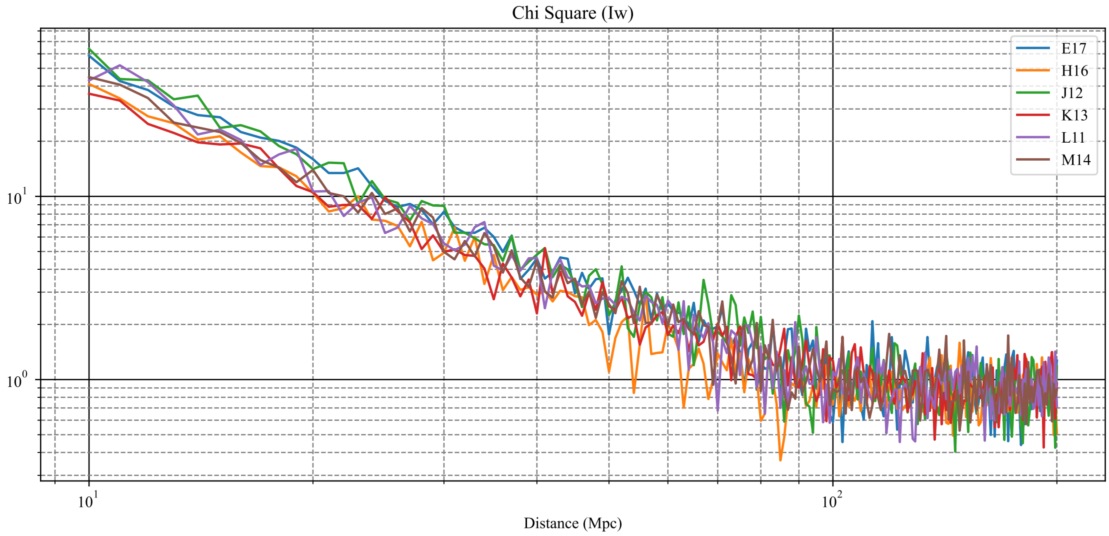


図 5.34　距離に対するカイ二乗統計量の振る舞い（Iw 型）

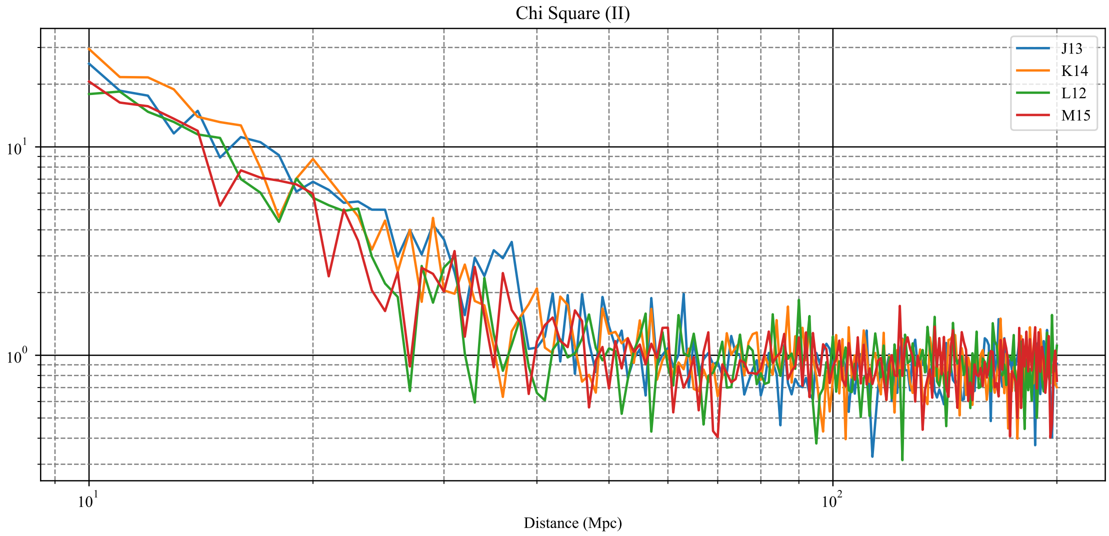


図 5.35　距離に対するカイ二乗統計量の振る舞い（II 型）

モデル	D(Mpc)	RSNR	誤報率 (回/年)
E15(Is)	124.0	8.66	0.058
E16(Is)	56.0	10.05	2.0×10^{-5}
E17(Iw)	50.0	7.83	6.9
H14(Is)	83.0	10.21	8.0×10^{-6}
H15(Is)	27.0	10.58	9.5×10^{-7}
H16(Iw)	74.0	6.80	2.6×10^{3}
J12(Iw)	53.0	7.99	2.8
J13(II)	58.0	6.98	910
K13(Iw)	38.0	9.44	6.6×10^{-4}
K14(II)	56.0	7.18	290
L11(Iw)	22.0	7.76	10
L12(II)	174.0	6.96	1.0×10^{3}
M12(Is)	101.0	9.05	6.2×10^{-3}
M13(Is)	46.0	10.85	2.0×10^{-7}
M14(Iw)	31.0	8.37	0.31
M15(II)	152.0	7.40	81

表 5.3　図 5.30,5.31,5.32 中で一番高い RSNR を出した点と、その RSNR の値。誤報率は有効数字 2 桁で四捨五入し、2 未満の値は赤字で示している。

モデル	m_1	m_2	χ_1	χ_2	t_c
E15	136.56	116.82	-0.790	-0.439	30.48
E16	136.56	116.82	-0.790	-0.439	30.56
E17	136.56	116.82	-0.790	-0.439	30.83
H14	136.56	116.82	-0.790	-0.439	30.56
H15	136.56	116.82	-0.790	-0.439	30.70
H16	106.89	16.583	0.099	0.238	30.95
J12	140.09	125.91	0.495	-0.688	30.78
J13	72.483	35.460	0.880	0.943	15.44
K13	136.56	116.82	-0.790	-0.439	30.74
K14	28.996	24.377	-0.182	-0.383	31.18
L11	149.41	16.879	-0.979	-0.776	30.70
L12	31.876	16.211	-0.666	0.546	19.47
M12	149.41	16.879	-0.979	-0.776	30.43
M13	136.56	116.82	-0.790	-0.439	30.55
M14	136.56	116.82	-0.790	-0.439	30.69
M15	24.051	17.564	0.870	0.468	12.70

表 5.4　最適なマッチをしたテンプレート。t_c はマッチした時刻を表す

まず、SNR の振る舞い（図 5.27–5.29）について考えてみる。一般論として、距離が遠ざかると SNR が減少していくが、6 程度で留まる様子が分かる。SNR が減少する部分は、距離 D に反比例する素直な振る舞いを示している。それぞれのモデルに対して SNR を距離の関数として両対数グラフでプロットしたものを以下に示す。ここでは、ノイズを加えずに探索を行ったときの SNR（図中の “optimal”、$1/D$ に比例）と比較している。これを見ると、近距離では $1/D$ に比例していることと、SNR が 6 を下回るような領域では、モデル波形がノイズに埋もれてしまうことが分かる。このことは、バックグラウンドの SNR 分布（図 5.24）から説明できる。図 5.24 は、1/32 秒のノイズで得られる SNR の分布を表している。今回は 60 秒のデータに対して探索を行っているから、入力データがノイズのみの場合、1/32 秒に 1 回 SNR を拾う試行を $60 \times 2048 \div 32 = 3840$ 回分繰り返すことになる。1/32 秒のノイズ探索で SNRρ の値が A 以下になる確率 $p(A)$ は累積分布（図 5.52）で推定できる。そして、60 秒間の探索を通じて最大の SNR として $(A, A+dA]$ の範囲に値を得る確率 P は

$$P(A \leq \rho \leq A + dA) = p(A + dA)^{3840} - p(A)^{3840} \tag{5.4.1}$$

と計算される。図 5.53 に示した P の確率分布から、6 前後の SNR にピークがあることが分かる。

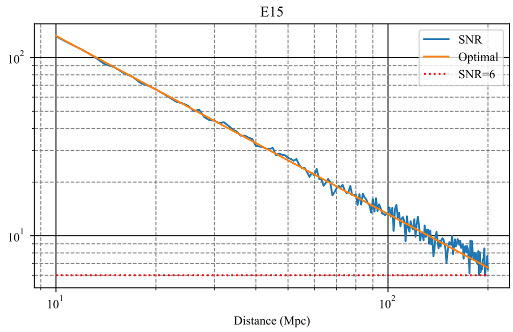


図 5.36　E15

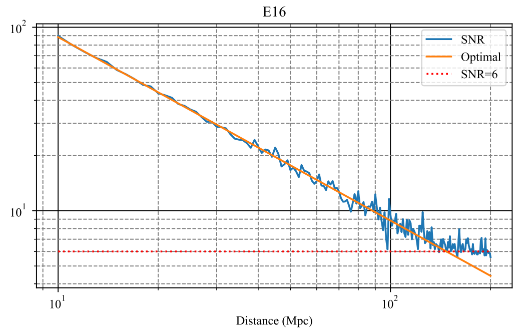


図 5.37　E16

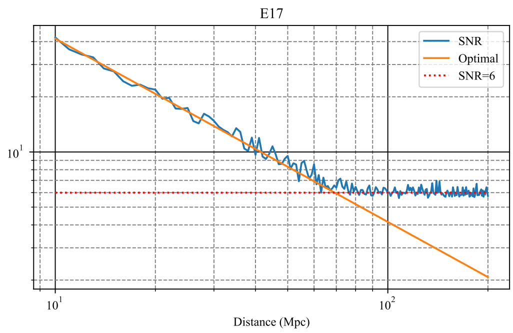


図 5.38　E17

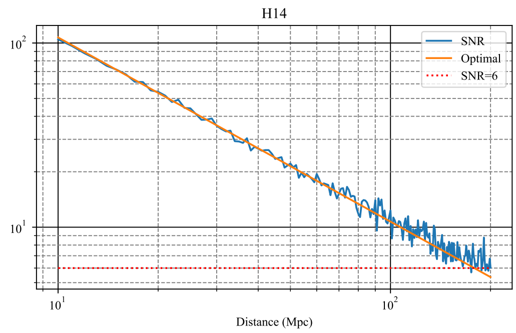


図 5.39　H14

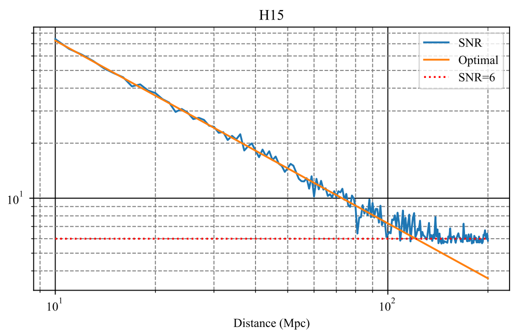


図 5.40　H15

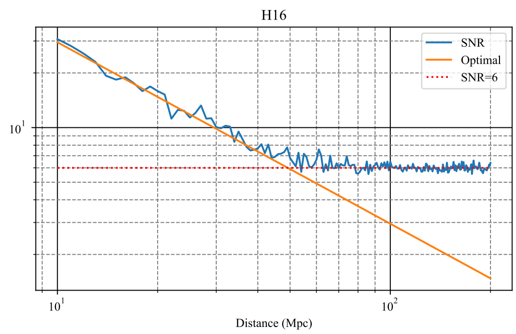


図 5.41　H16

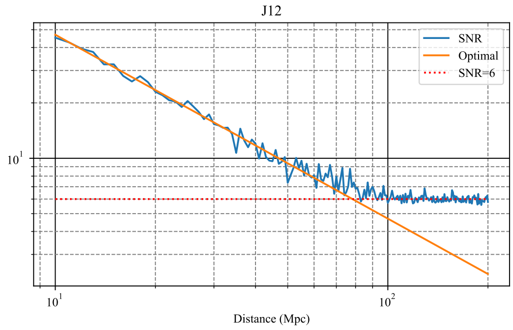


図 5.42　J12

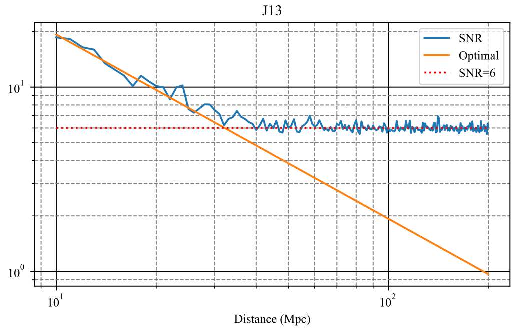


図 5.43　J13

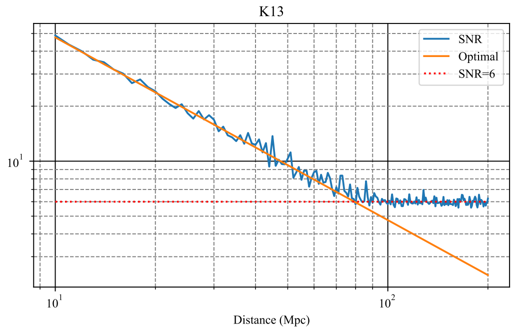


図 5.44　K13

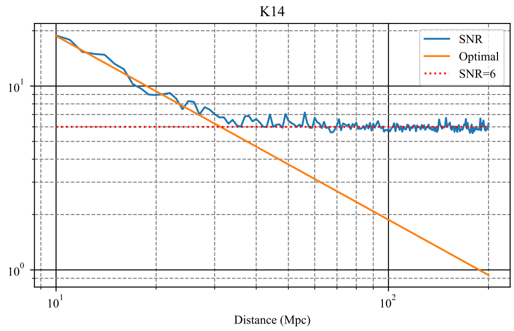


図 5.45　K14

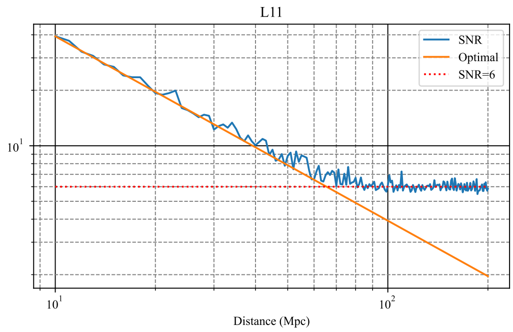


図 5.46　L11

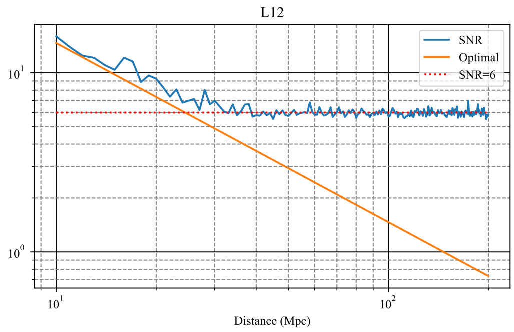


図 5.47　L12

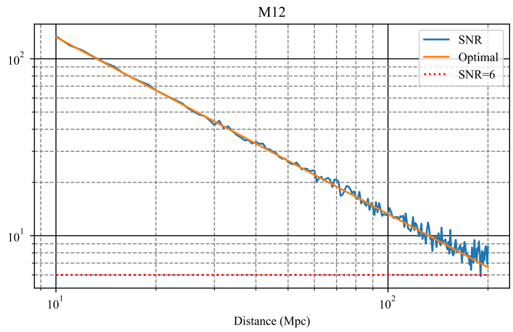


図 5.48　M12

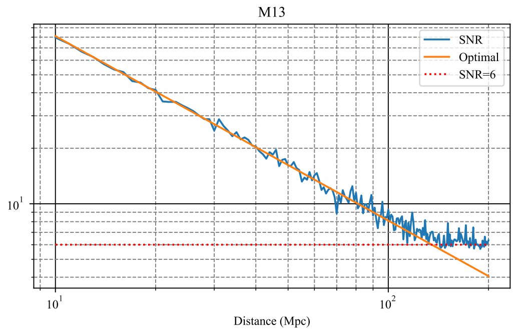


図 5.49　M13

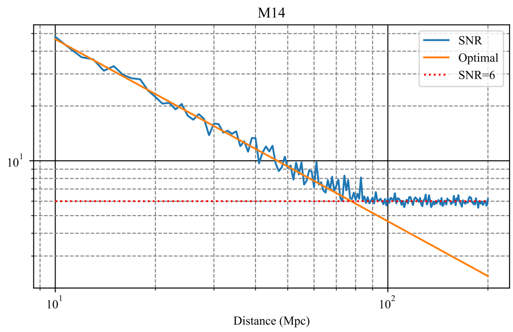


図 5.50　M14

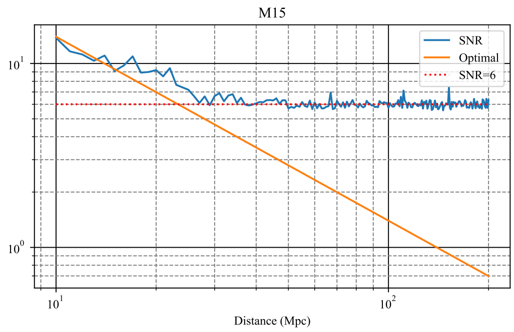


図 5.51　M15

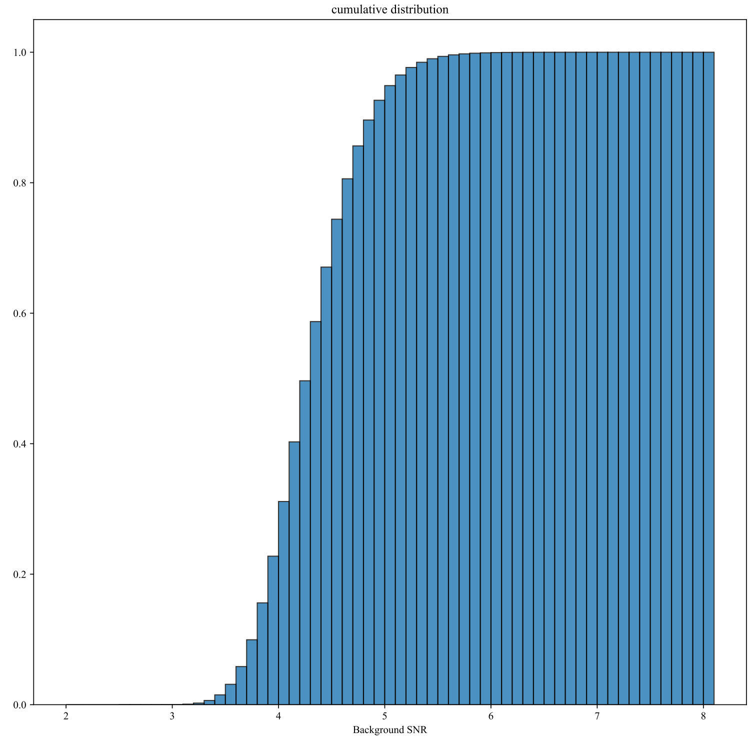


図 5.52　バックグラウンド SNR の累積分布

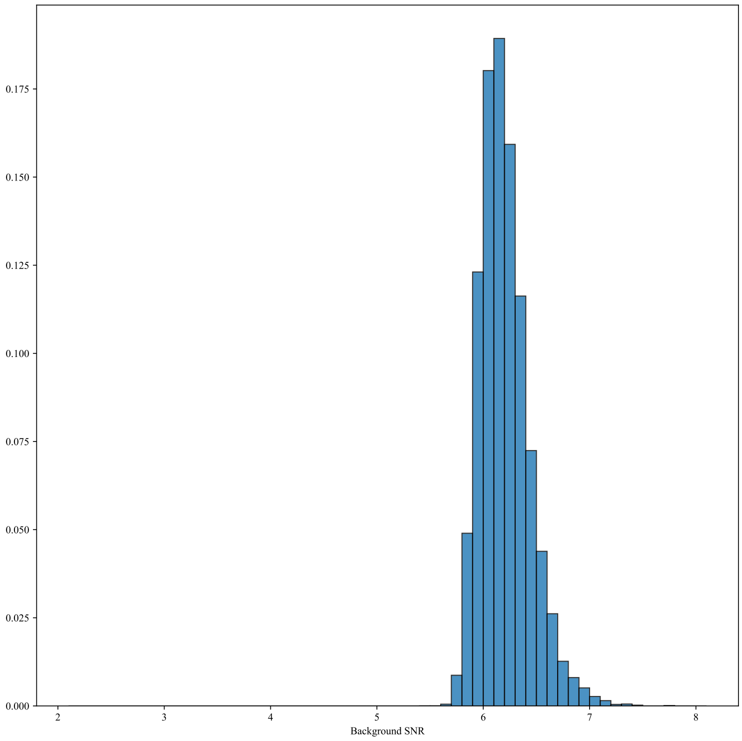


図 5.53　60 秒のノイズを探索して、その SNR を得る確率

モデルごとに SNR の大きさが異なる点について少し言及しておく。シミュレーションの初期パラメータによって波形がどのように変化するかを正確に追うことは容易ではないが、定性的に大まかな傾向を掴むことは可能である。図 5.54 は、各モデルの円盤質量を縦軸、円盤の大きさを横軸にしてプロットしたものであり、各モデルの横に対応する SNR を付記している。これを見ると左上に行くほど SNR が高く出て、右下の方に行くと逆に SNR は小さくなる傾向が分かる。この傾向は、4.5 節で述べたモデル波形の分類に凡そ一致している。Is → Iw →II の順で SNR が小さくなり、波形が CBC からずれていく。

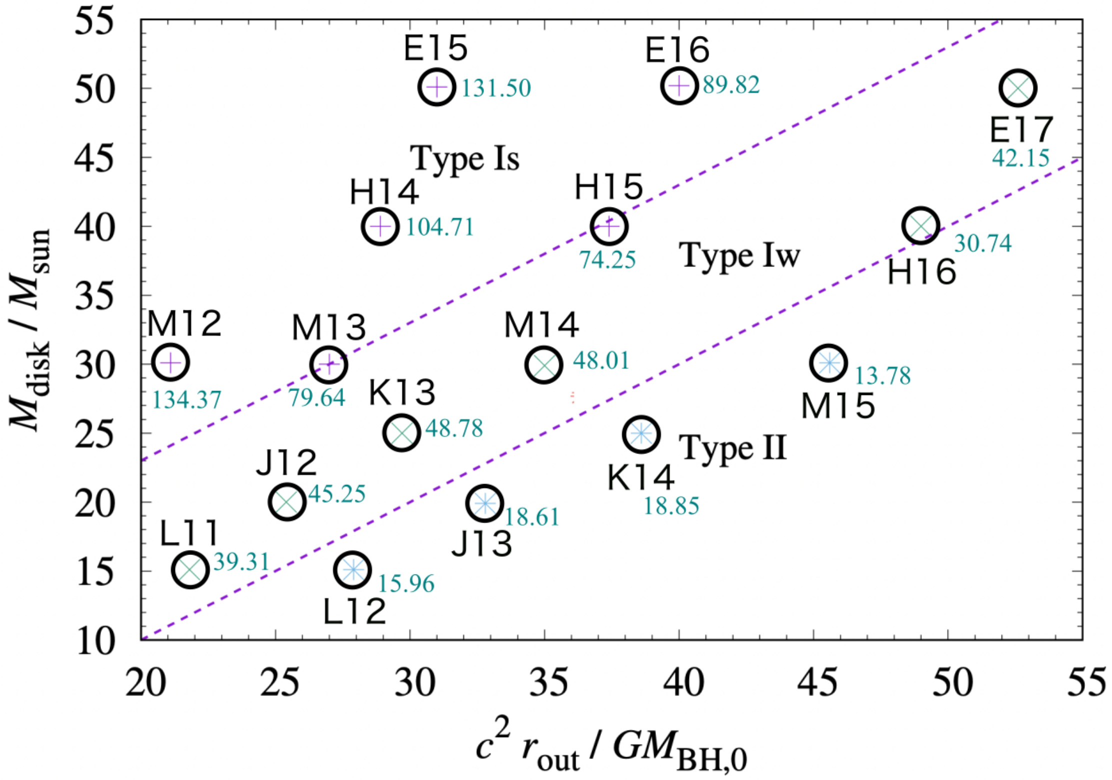


図 5.54　図 4.6 をベースに、対応するモデルと 10Mpc における SNR を示したもの。

次に、SNR と RSNR の振る舞いの違いに着目してみる。SNR の値をある程度揃えて、対応する RSNR の値を列挙した（図 5.55)。SNR に対する RSNR の比率は、II 型で顕著に小さい。また、Iw 型の中でも特に誤報率の低かった K13 と M14 に関しては Is 型と同様の比率を持っていることが分かる。

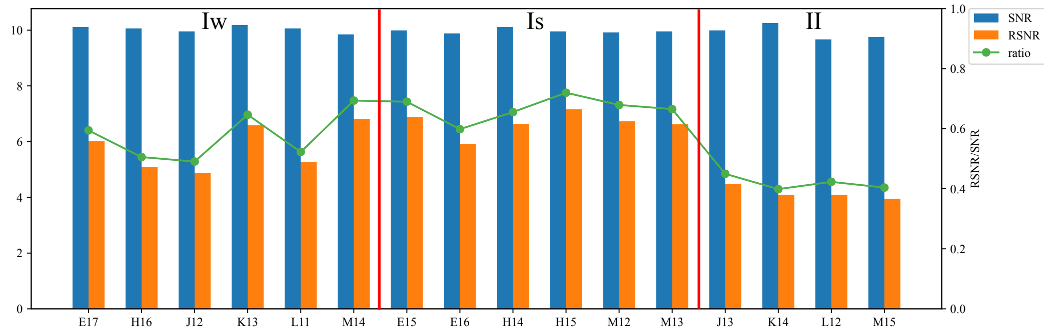


図 5.55　SNR $\rho = 10$ 程度の距離で同士で RSNR の値を比較したもの。左軸が SNR（RSNR）の値、右軸がその比を表す。

以下に、モデル波形毎に SNR と RSNR を比較したグラフを示す（図 5.56–5.71）。これらのグラフを見ると、RSNR の振る舞いとモデル波形の分類におおよそ関係があることが分かる。Is 型では、距離を小さくしていくと、一定以上近づけば RSNR の値が 6 より少し高い値で安定する。Iw 型では、距離に関わらず概ね 6 程度の値を取る。一方 II 型は、距離を小さくすると却って RSNR の値が 6 を下回ってしまう。例外的に、K13 と M14 は Iw 型にも関わらず、Is 型のような挙動を示す。

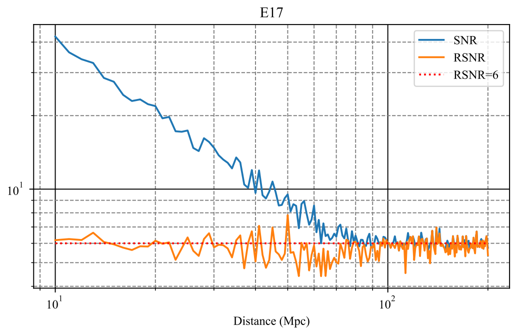


図 5.56　E17（Iw 型）

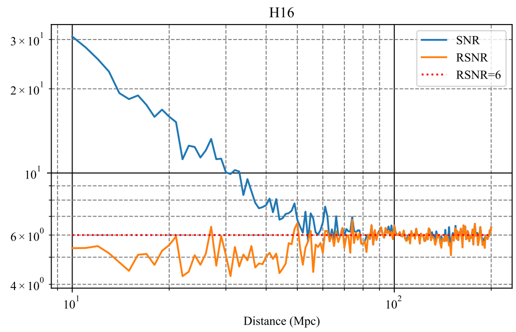


図 5.57　H16（Iw 型）

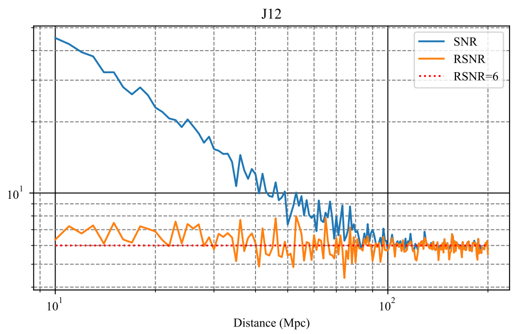


図 5.58　J12（Iw 型）

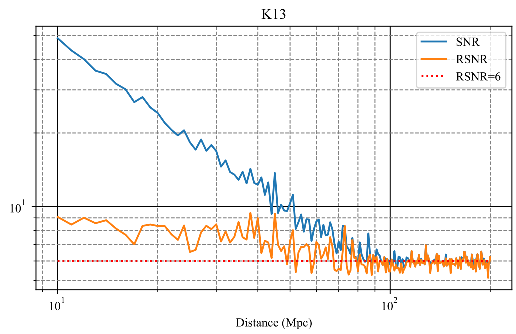


図 5.59　K13（Iw 型）

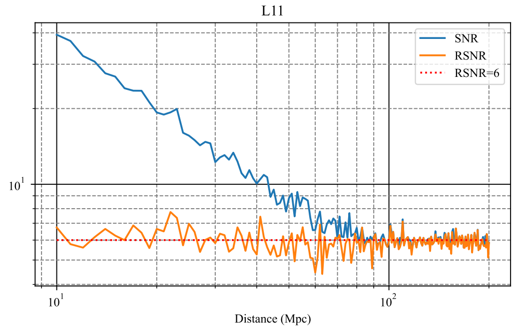


図 5.60　L11（Iw 型）

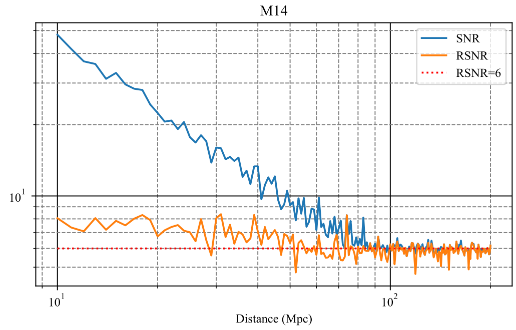


図 5.61　M14（Iw 型）

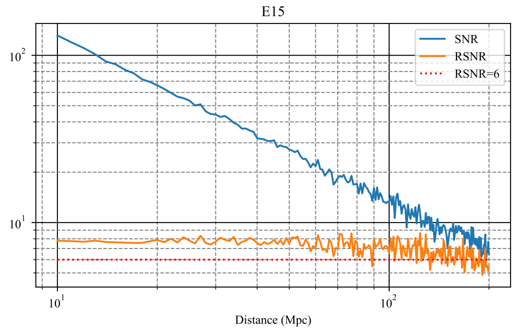


図 5.62　E15（Is 型）

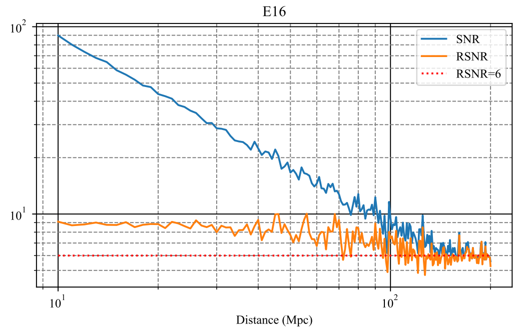


図 5.63　E16（Is 型）

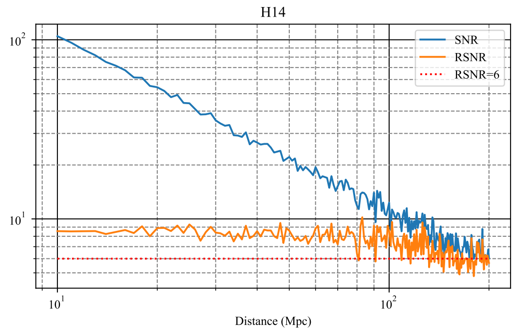


図 5.64　H14（Is 型）

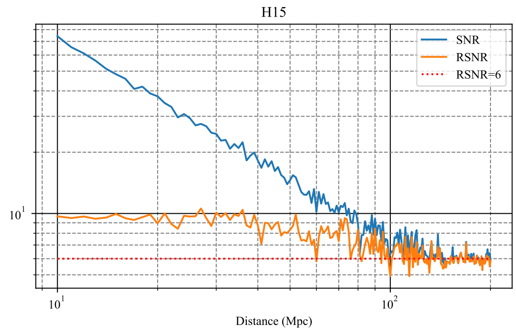


図 5.65　H15（Is 型）

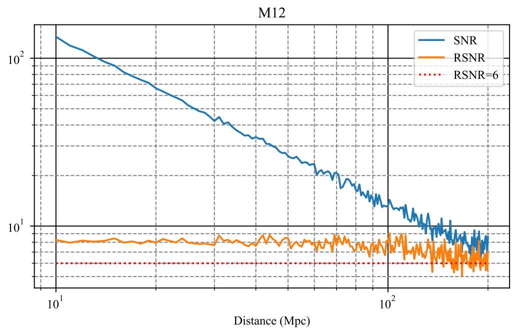


図 5.66　M12（Is 型）

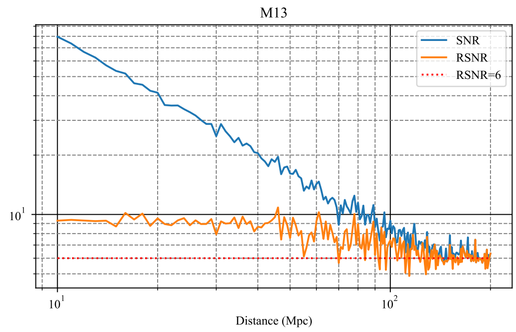


図 5.67　M13（Is 型）

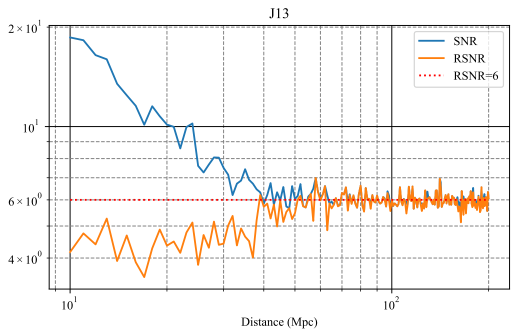


図 5.68　J13（II 型）

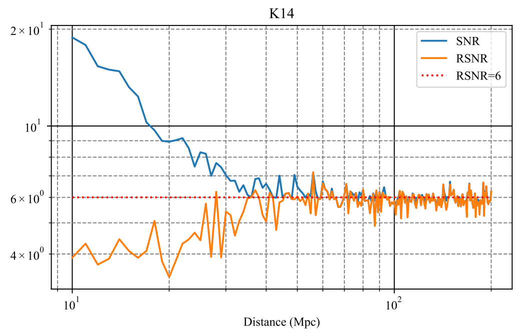


図 5.69　K14（II 型）

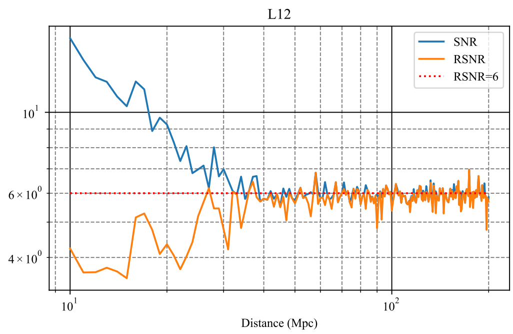


図 5.70　L12（II 型）

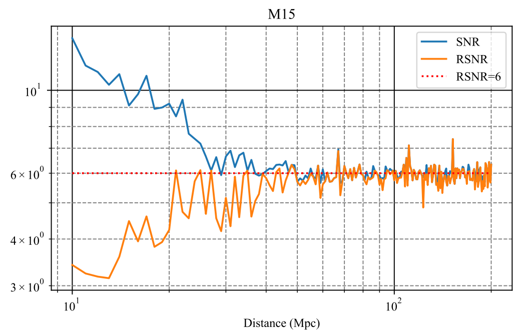


図 5.71　M15（II 型）

RSNR が SNR ほどは大きくならない（＝カイ二乗統計量が小さくならない）原因について考えてみる。まず一般論として、式 (3.5.5) で定義したカイ二乗は SNR が大きくなると、それに連れられて大きくなる傾向がある。カイ二乗は、周波数帯域を分割し、テンプレートとのずれ $\Delta\rho_j$ を計るものである。完璧にテンプレートと同じ信号にマッチしているのあれば $\chi_2 = 0$ であるが、実際にはそのようなテンプレートは用意できないため、探索では一番近いテンプレートが呼び出される。SNR のスケールが大きくなれば、それに応じて $\Delta\rho_j$ のスケールも大きくなってしまうので結果的にカイ二乗も大きくなる。実際、図 5.72 で示している CBC 波形の探索の結果で分かるように、近距離（=SNR が大きくなる）のとき必ずしも RSNR が大きくなる訳ではない。これを念頭に置くと、Is 型の波形は自然な振る舞いをしていることが分かる。

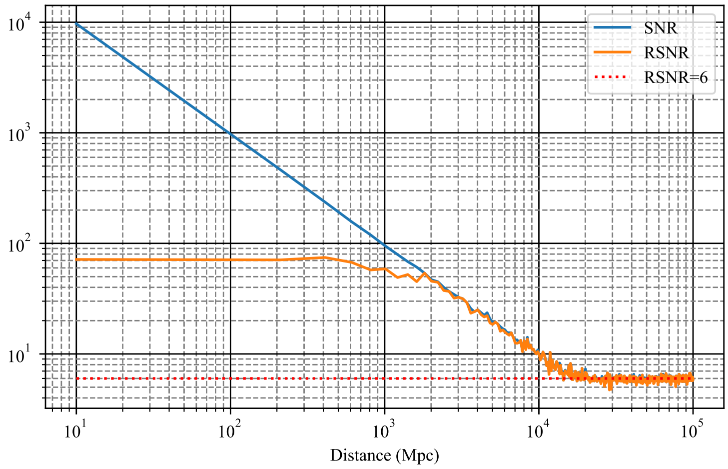


図 5.72　パイプラインの動作確認（5.3.5 節）で使った CBC 波形を、距離を変えた探索したときの SNR と RSNR の変化

ここで、高い RSNR を取ったのがモデル波形のどの部分に由来しているのか、或いはノイズに反応しているのかを確かめるためにホワイトニングした波形を図示してみる。最も高い RSNR を出したのは $D = 46.0$Mpc における M13 であるから、代表例として M13 を見てみよう。

M13

一番高い RSNR を叩き出したモデル M13 から詳しく見てみる。まず、ホワイトニングしたモデル波形を、探索時に RSNR が最大を取った時刻を中心として、その時刻付近を図 5.73 に図示した。これによると、マッチドフィルターによってモデル波形の存在を検出できていることが分かる。

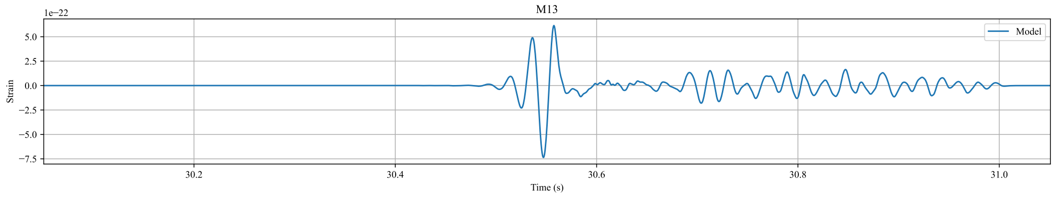


図 5.73　マッチ時刻付近のホワイトニングしたモデル波形（M13,$D = 46.0$Mpc）

そして、入力データとテンプレートをホワイトニングして図示したものを図 5.74 に示し、ホワイトニングした入力データからホワイトニングしたテンプレートを引いた残差（residual）を図 5.75 に示す。残差を見ると、入力データに顕著な波が消えていることが確認できる。

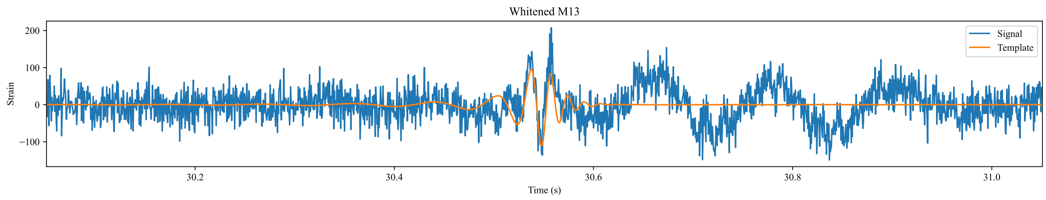


図 5.74　ホワイトニングした信号とテンプレート（M13）

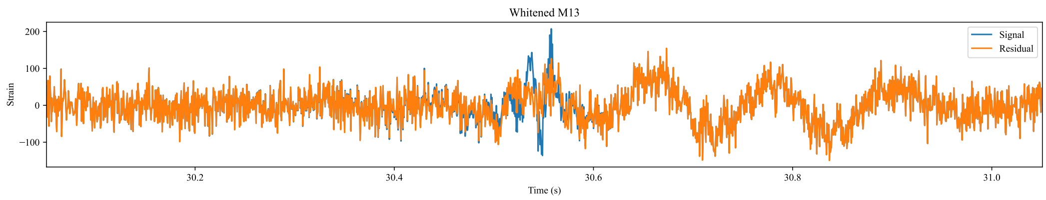


図 5.75　残差（M13）

そして、入力データと残差のスペクトログラムを図 5.76 に示す。これを見ると、入力データの 30.5–30.6 秒の辺りには 20–60Hz 帯に強い信号が入っており、テンプレートを引き去るとその信号も小さくなるように見えることが分かる。ここで、注目したいのはピーク時刻より少し後（30.7–31.0 秒）に何かしらの信号があるように見える点である。これは、モデル波形（図 5.17）がバーストの後に準周期的な波を持つ構造をしているからである。しかし、この準周期振動はテンプレートとマッチしておらず、探索には影響を及ぼしていな

い。つまり、今回のような CBC パイプラインを使った探索では、バースト部だけが CBC 波形テンプレートに引っ掛かり、準周期的な波は無視されている。これは 4.5 節で述べたような、バースト部だけが程よくマッチドフィルターに引っ掛かるという状況を実現できていることを示している。

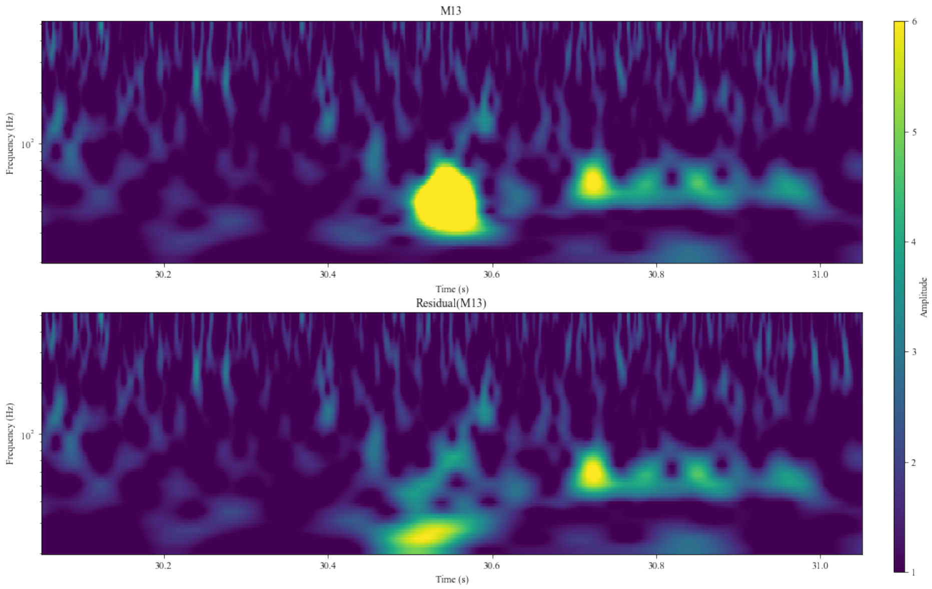


図 5.76　スペクトログラム（M13）。上段が入力データ、下段が残差

M13（Is 型）は検出可能性があると判断された波形であった。今度は誤報率が惜しくも検出基準を満たさなかった Iw 型の L11 を見てみよう。

L11

M13 同様に、ホワイトニングしたモデル波形を図 5.77 に図示した。

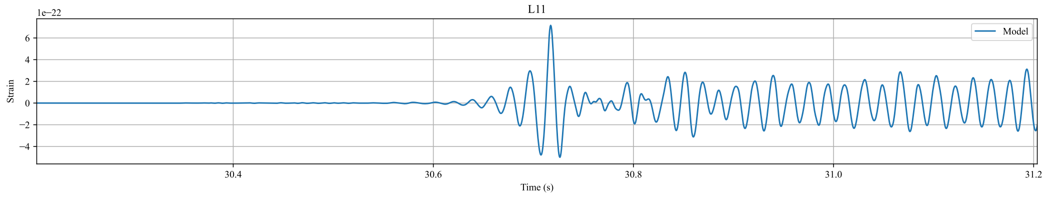


図 5.77　マッチ時刻付近のホワイトニングしたモデル波形（L11,$D = 22.0$Mpc）

そして、入力データとテンプレートをホワイトニングして図示したものを図 5.78 に示し、ホワイトニングした入力データからホワイトニングしたテンプレートを引いた残差及びスペクトログラムを図 5.79,5.80 に示す。注目すべき点は、準周期振動がバースト部に比して小さくないことである。スペクトログラム（図 5.80）を見れば明らかなように、準周期振動部分がバースト部とさほど変わらない強度で現れている。これがカイ二乗統計量を高くしている原因となり、誤報率を引き上げている可能性がある。この点に関しては次項（5.4.2 項）で検証する。

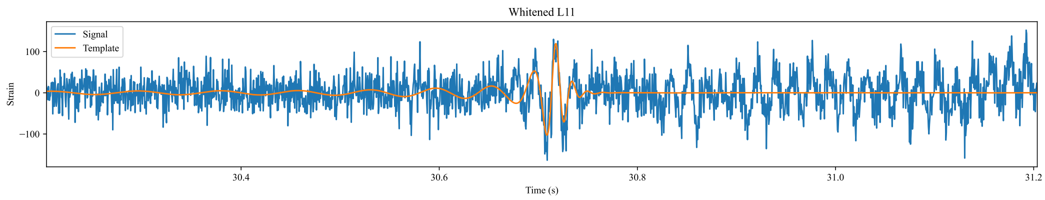


図 5.78　ホワイトニングした信号とテンプレート（L11）

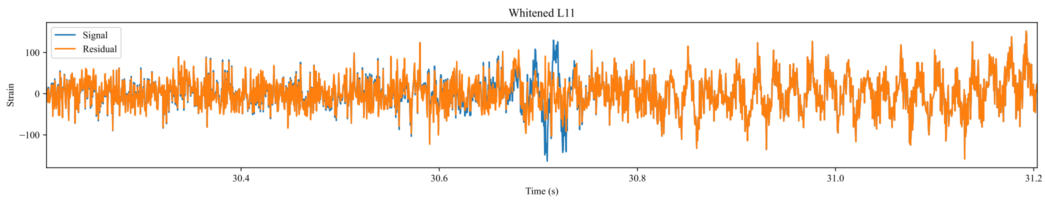


図 5.79　残差（L11）

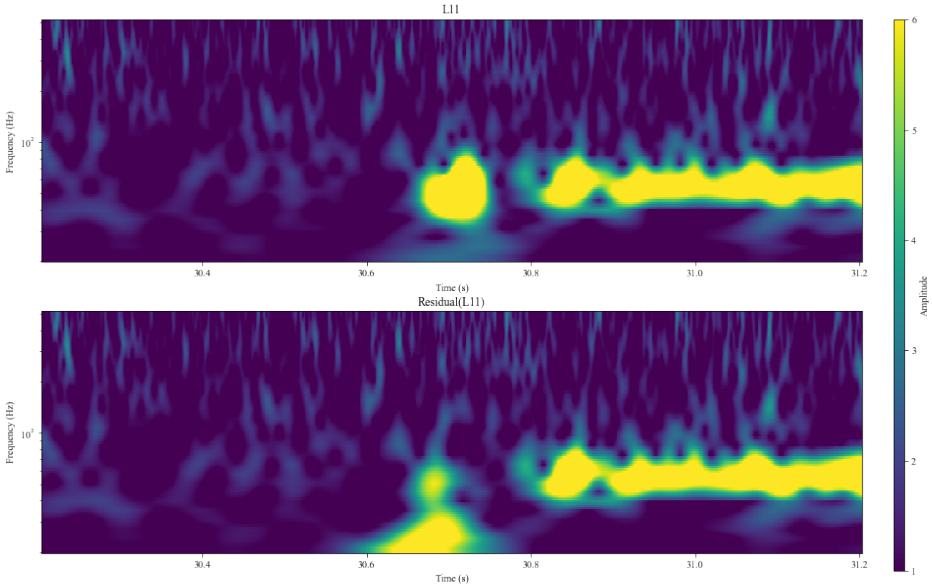


図 5.80　スペクトログラム（L11）。上段が入力データ、下段が残差

最後に、II 型を見てみる。ここでは K14 を取り上げる。

K14

M13,L11 同様に、ホワイトニングしたモデル波形、ホワイトニングした入力データとテンプレート、残差及びスペクトログラムを図 5.81,5.825.83,5.84 に図示した。II 型のモデル波形になると、明らかに CBC 波形と異なっているためバースト部とマッチしておらず、有意な検出とは見做されない。

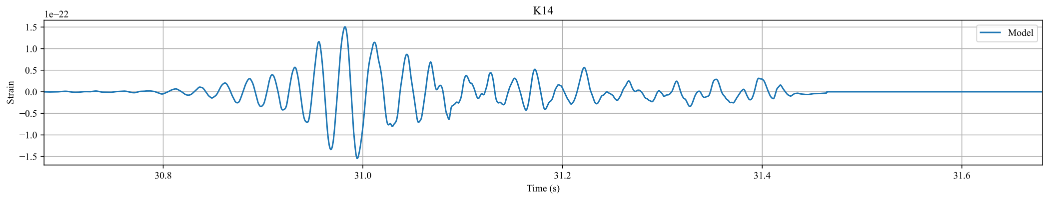


図 5.81　マッチ時刻付近のホワイトニングしたモデル波形（K14,$D = 56.0$Mpc）

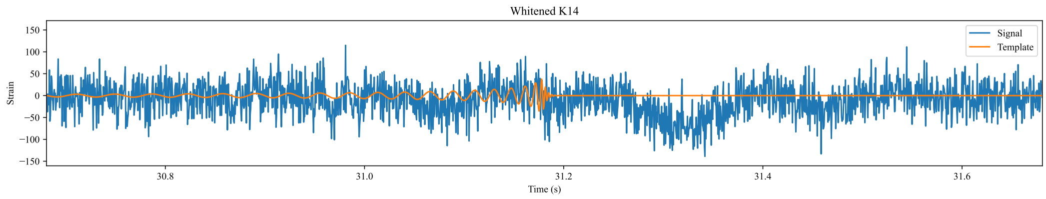


図 5.82　ホワイトニングした信号とテンプレート（K14）

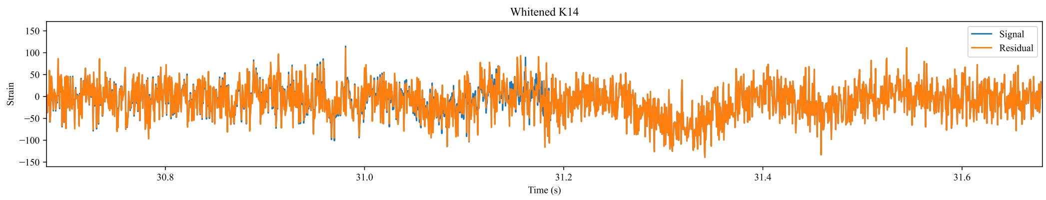


図 5.83　残差（K14）

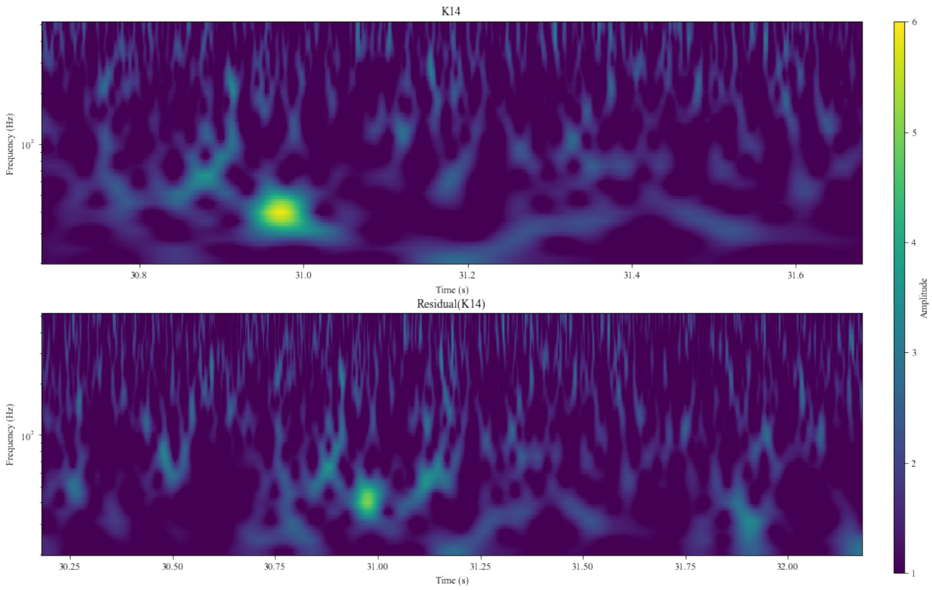


図 5.84　スペクトログラム（K14)。上段が入力データ、下段が残差

5.4.2　波形のカット

5.4.1 節では、距離でスケーリングしたモデル波形を入力し、その振る舞いを見てきた。スペクトログラムを見ると準周期振動の部分がはっきりと確認できる。この準周期振動がカイ二乗統計量を押し上げており、モデルによっては準周期振動が大きく、これが検出の有意性が高まらない要因になっている可能性がある。そこで、準周期的な部分をカットした波形が検出パイプラインにどう受け取られるかを考察したい。準周期振動が見えなくなる状況は現実にも起こり得るもので、例えば磁気粘性によって波形の後ろの部分が抑制されてしまい見えなくなる可能性がある。

波形のカットは、ある時点でいきなりゼロにする不連続な切り方をしてしまうと、フーリエ変換した際に大きな振動が現れてしまう（ギブズ現象）。それを避けるために今回はシグモイド関数を掛けて不要な部分以降を減衰させる処置を取った。切りたい時刻に合わせて図 5.85 で示した関数を掛ける。カットした波形は図 5.91–5.99 に示す。

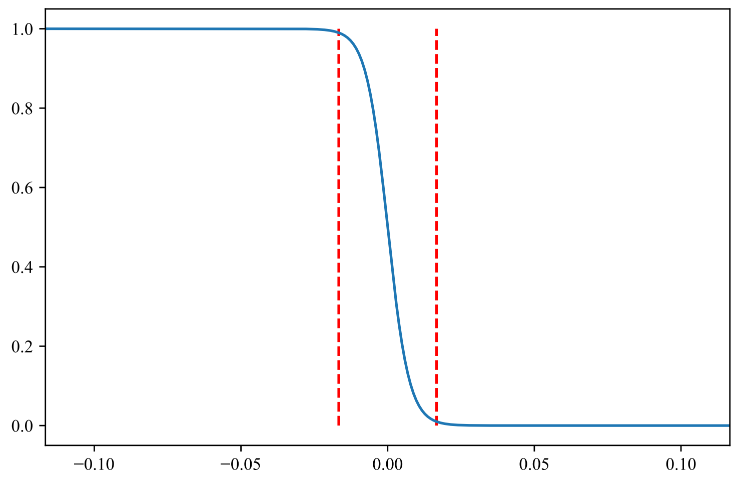


図 5.85　実際に使用したシグモイド関数。左の赤線が 0.99、右の赤線が 0.01 を示している。赤線間の幅は 1/60 である

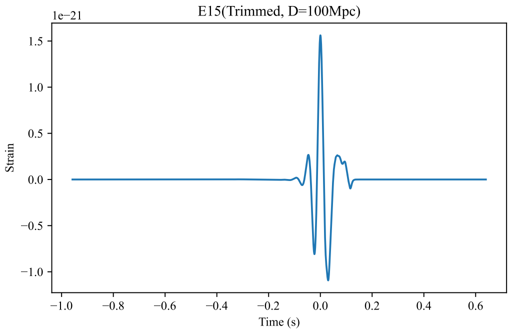


図 5.86　E15

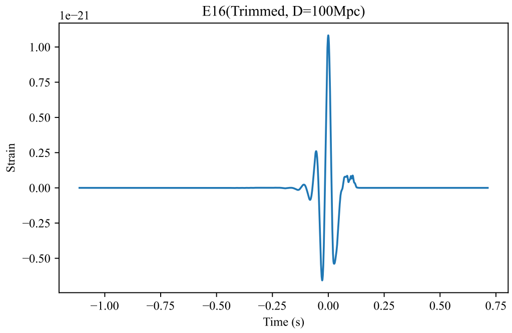


図 5.87　E16

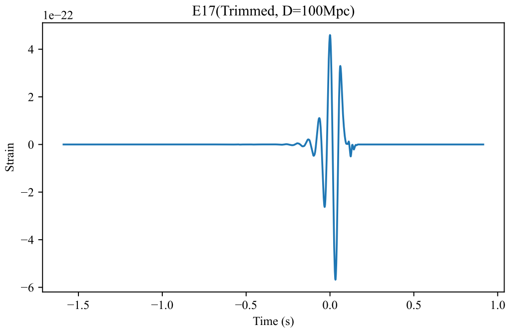


図 5.88　E17

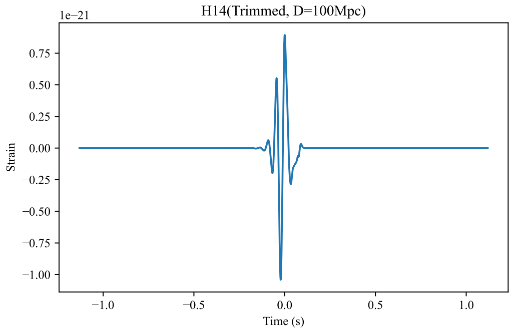


図 5.89　H14

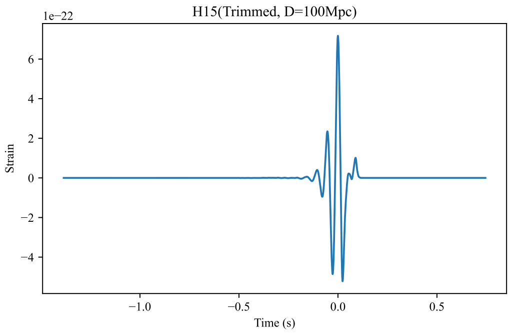


図 5.90　H15

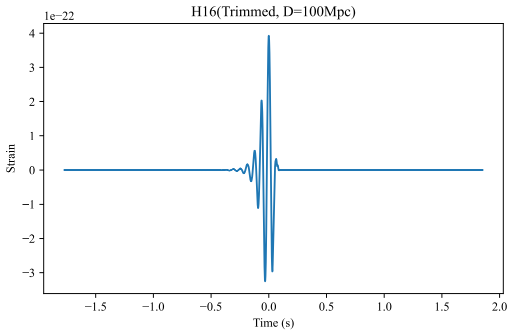


図 5.91　H16

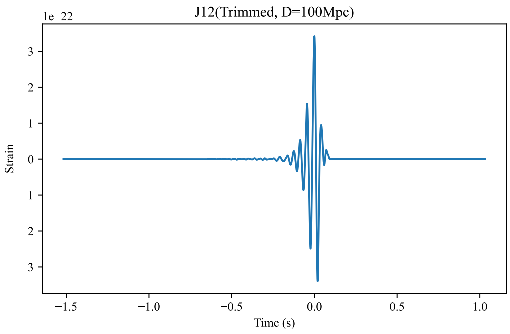


図 5.92　J12

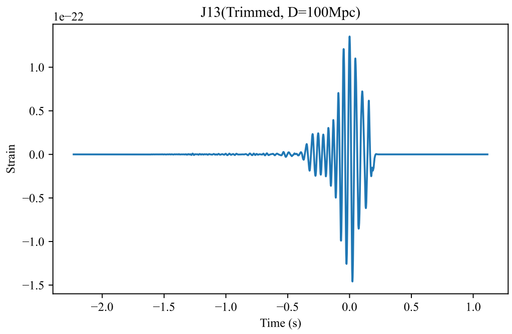


図 5.93　J13

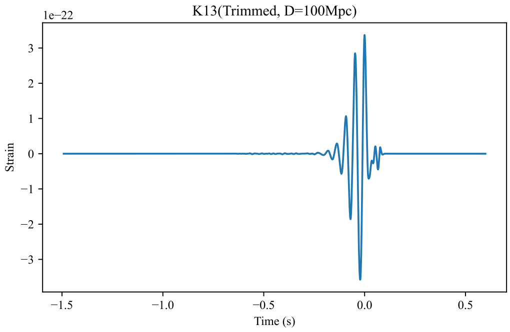


図 5.94　K13

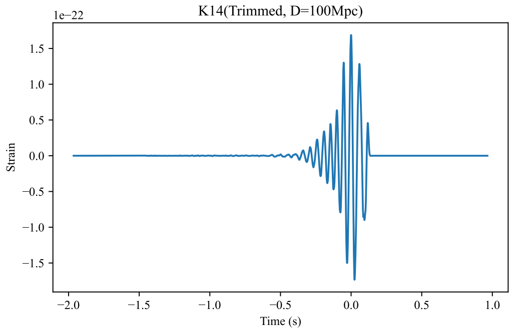


図 5.95　K14

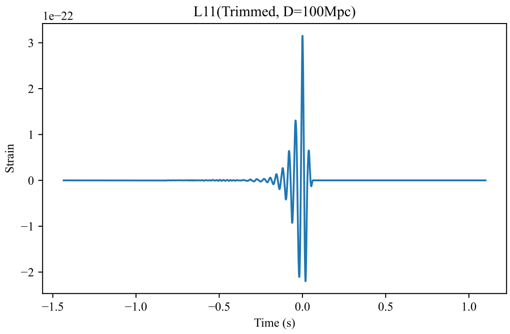


図 5.96　L11

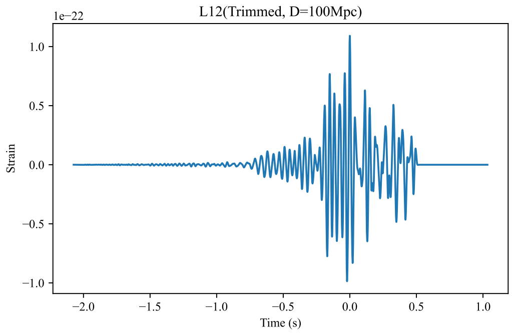


図 5.97　L12

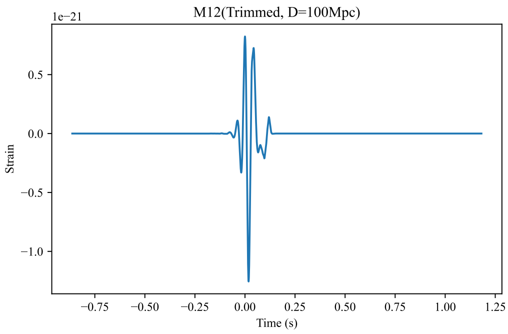


図 5.98　M12

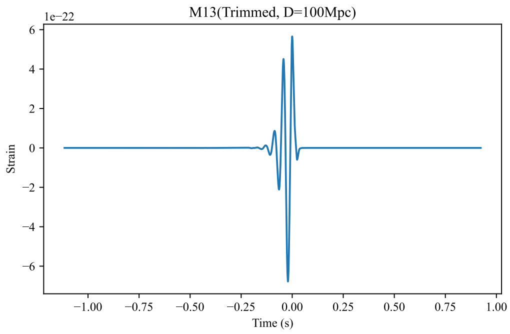


図 5.99　M13

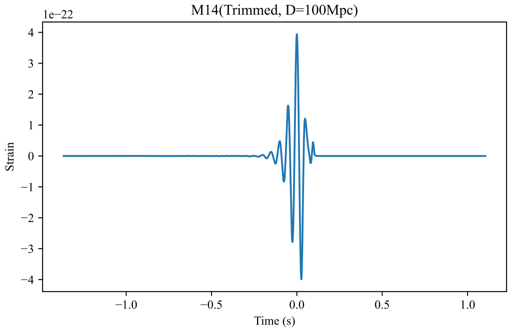


図 5.100　M14

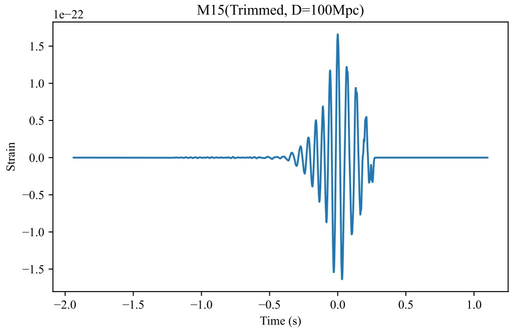


図 5.101　M15

ここでカットした波形の SNR と RSNR、カイ二乗統計量を示す。

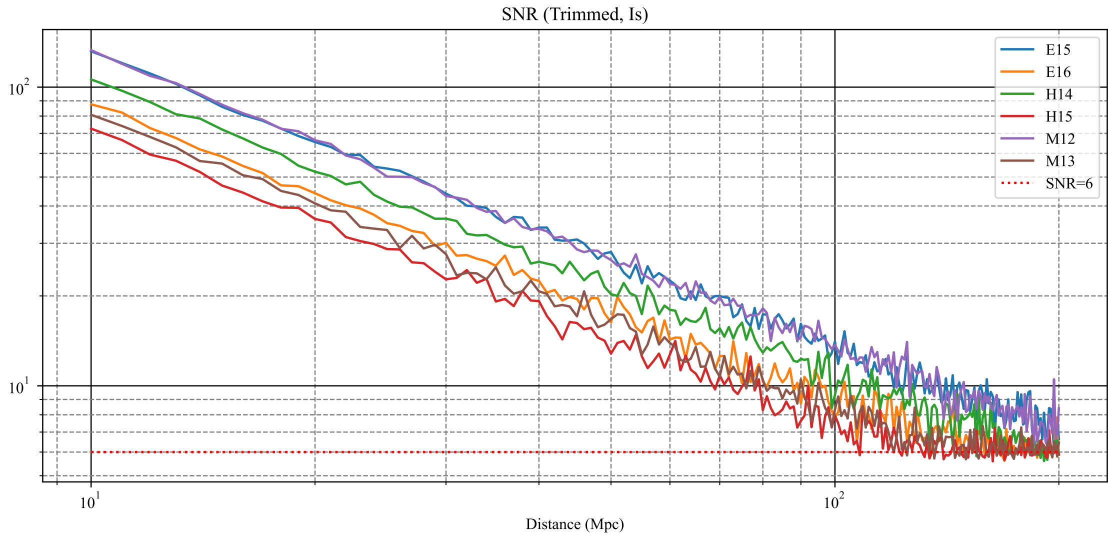


図 5.102　距離に対する SNR の振る舞い（Is 型）

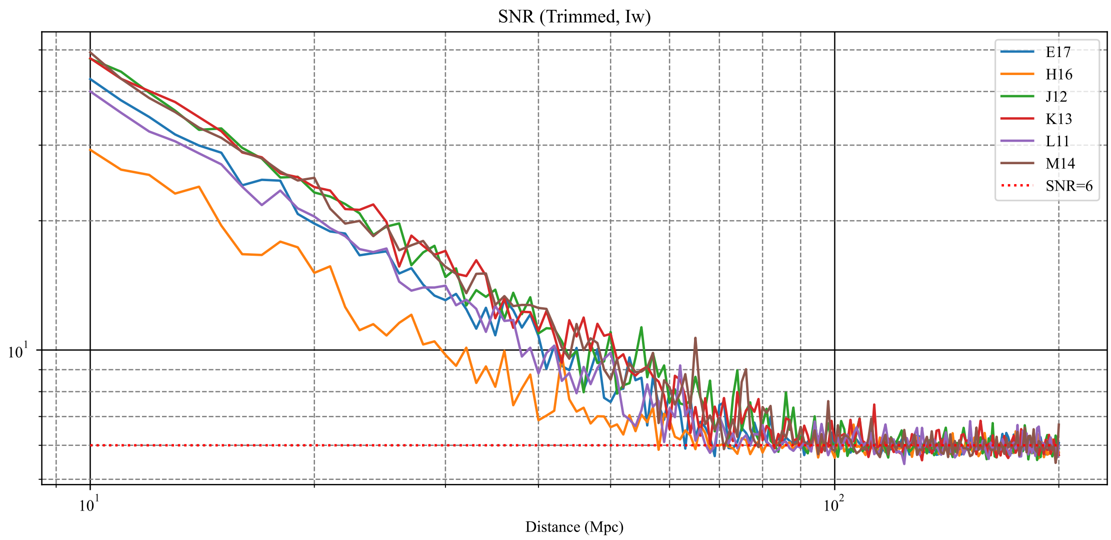


図 5.103　距離に対する SNR の振る舞い（Iw 型）

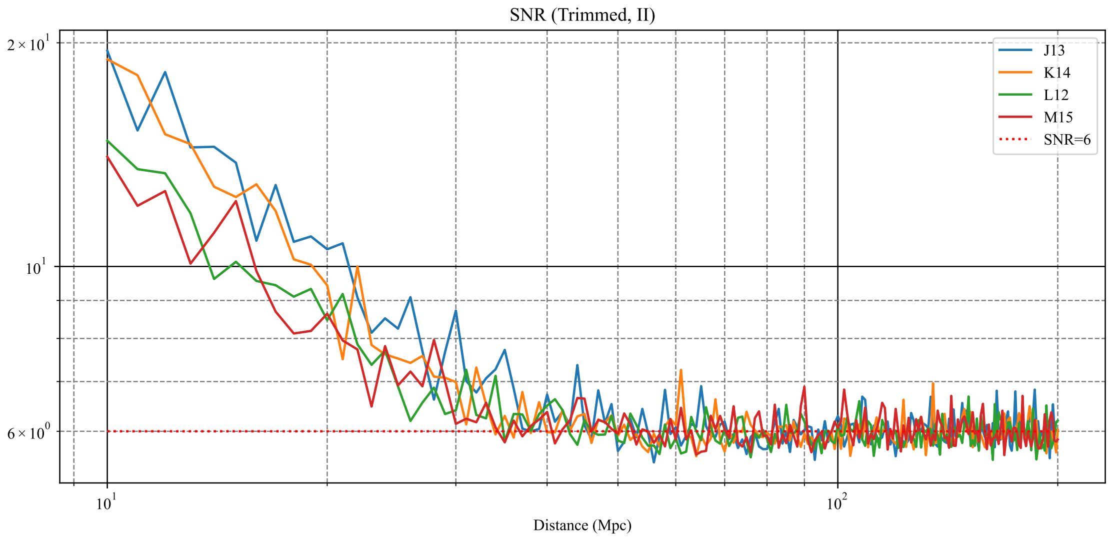


図 5.104　距離に対する SNR の振る舞い（II 型）

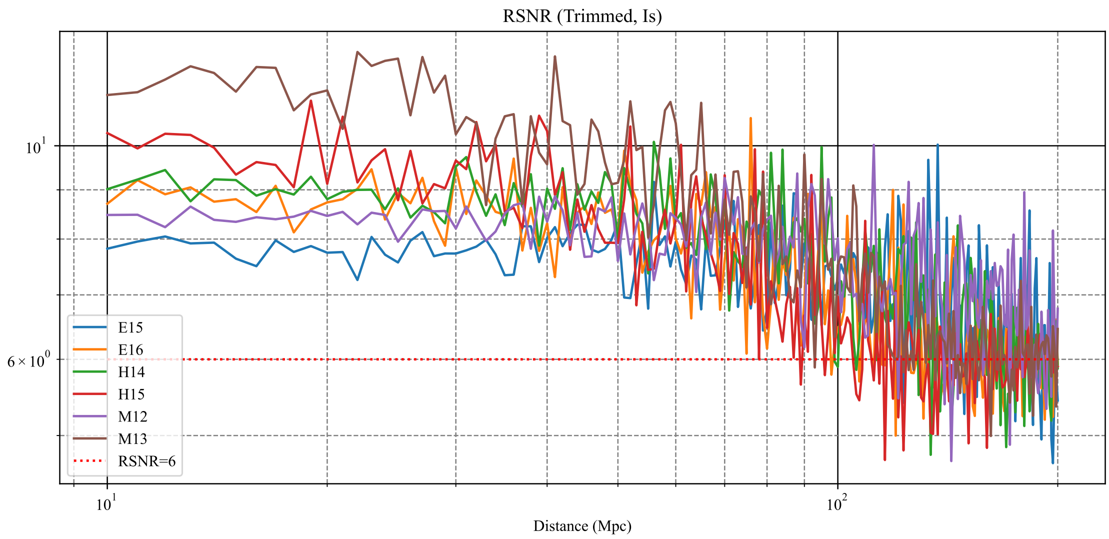


図 5.105　距離に対する RSNR の振る舞い（Is 型）

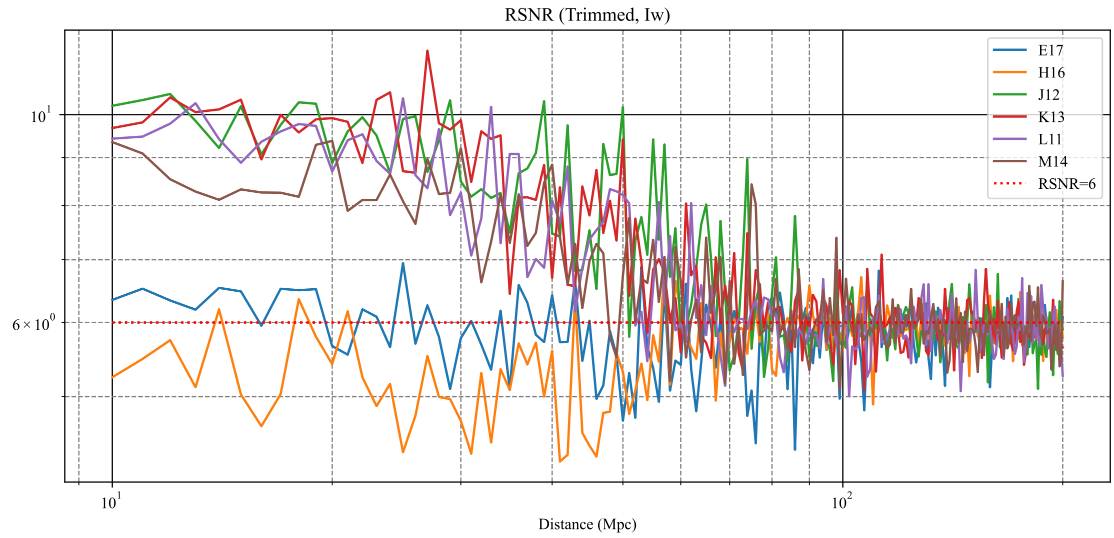


図 5.106　距離に対する RSNR の振る舞い（Iw 型）

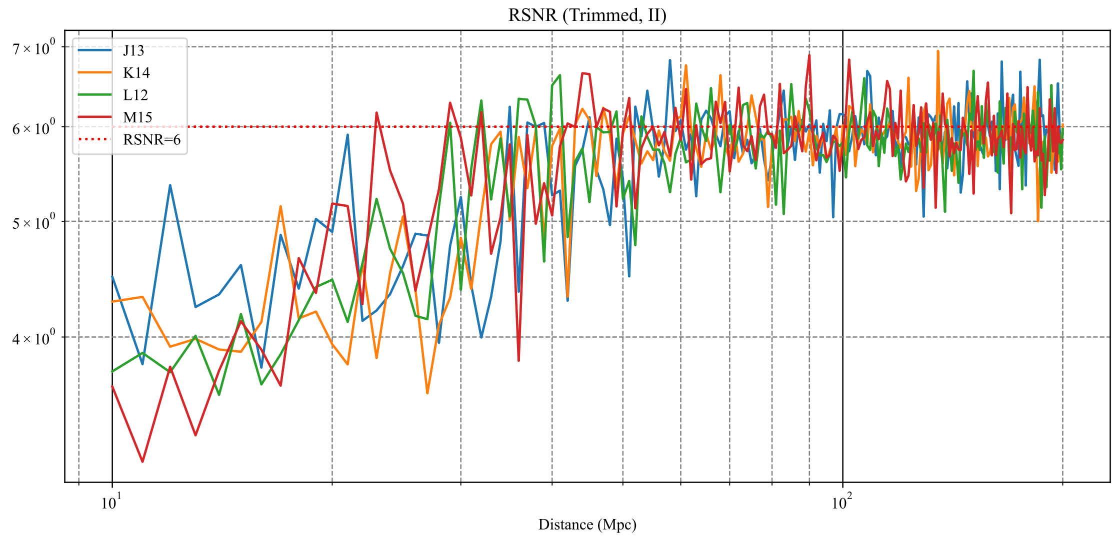


図 5.107　距離に対する RSNR の振る舞い（II 型）

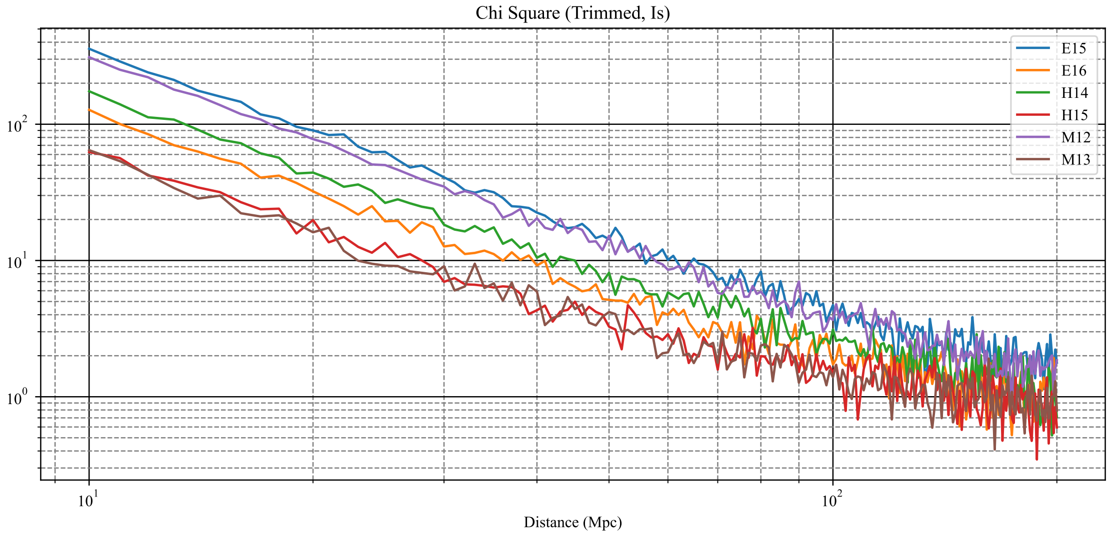


図 5.108　距離に対するカイ二乗統計量の振る舞い（Is 型）

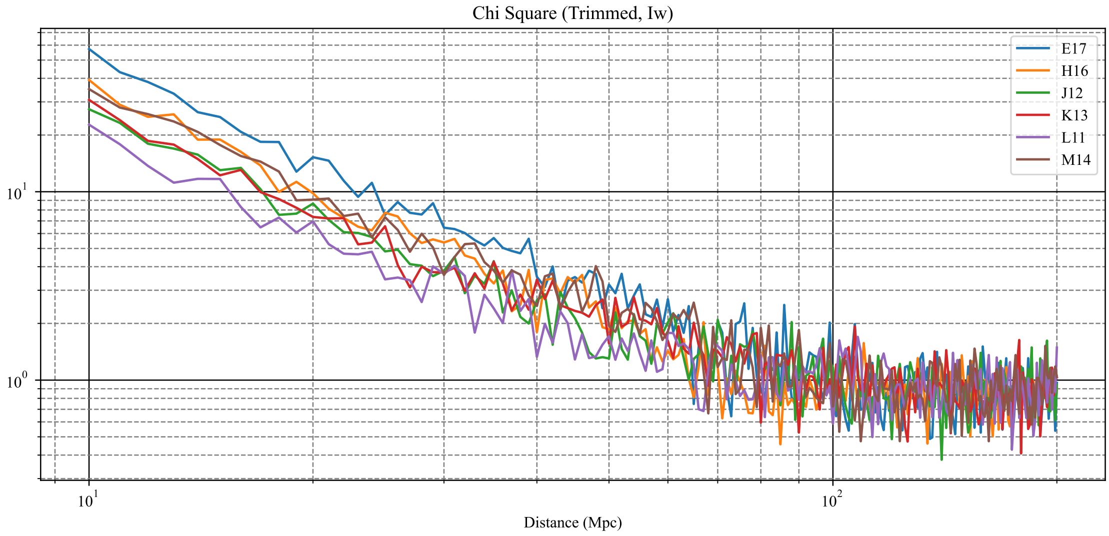


図 5.109　距離に対するカイ二乗統計量の振る舞い（Iw 型）

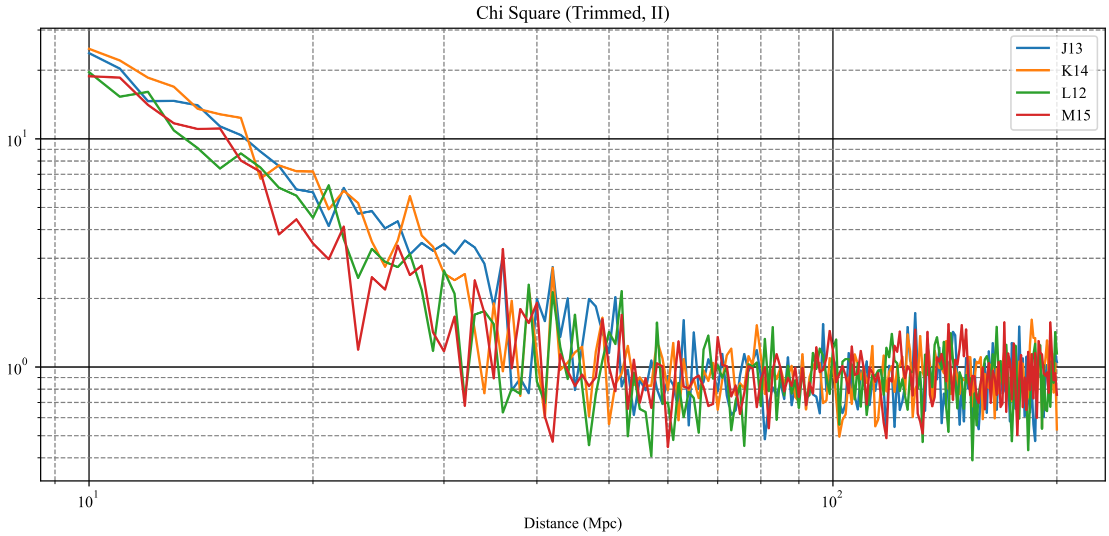


図 5.110　距離に対するカイ二乗統計量の振る舞い（II 型）

波形のカットによって、SNR の変化はほとんど見られない（図 5.111–5.126）。以下に、モデル波形毎に波形カット前（“Before”）とカット後（“After”）の値を提示する。

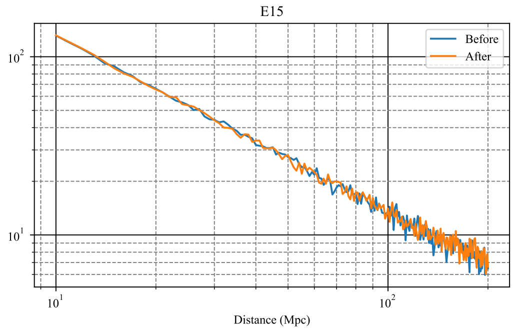


図 5.111　SNR の変化（E15）

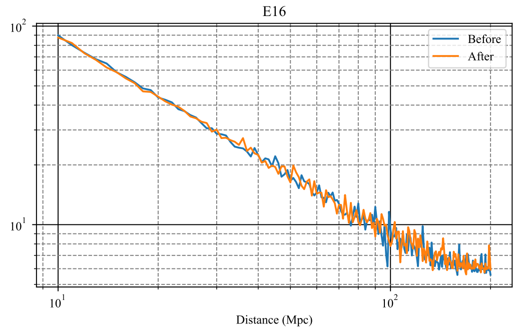


図 5.112　SNR の変化（E16）

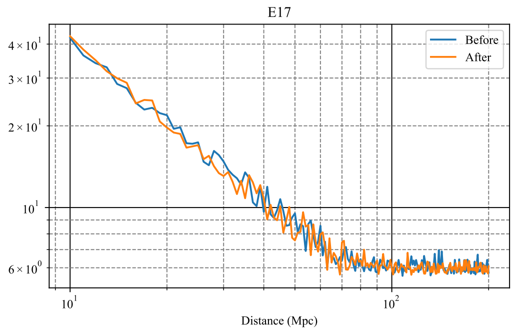


図 5.113　SNR の変化（E17）

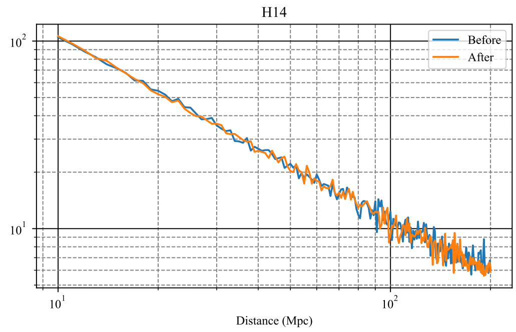


図 5.114　SNR の変化（H14）

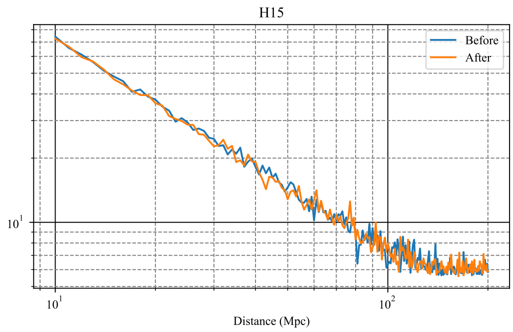


図 5.115　SNR の変化（H15）

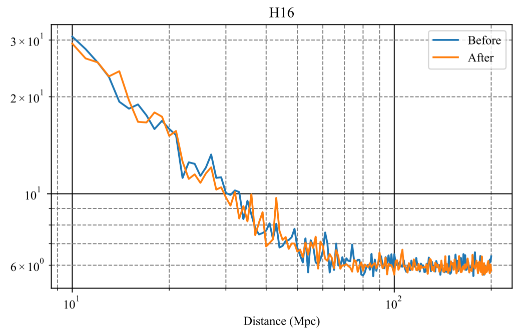


図 5.116　SNR の変化（H16）

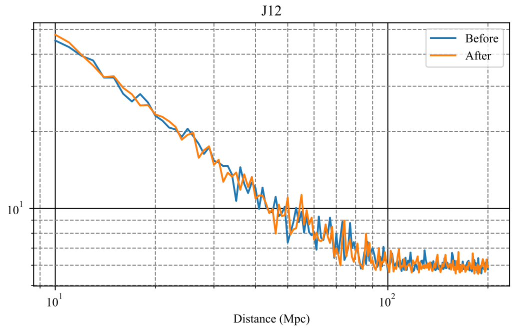


図 5.117　SNR の変化（J12）

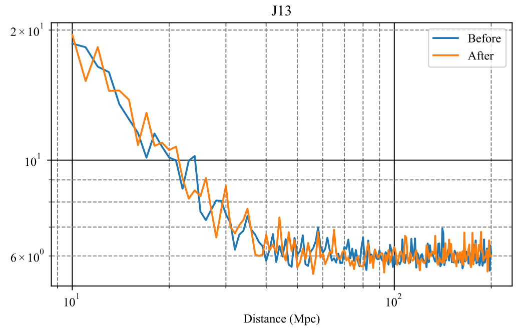


図 5.118　SNR の変化（J13）

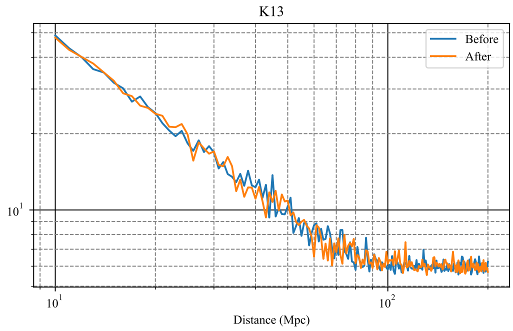


図 5.119　SNR の変化（K13）

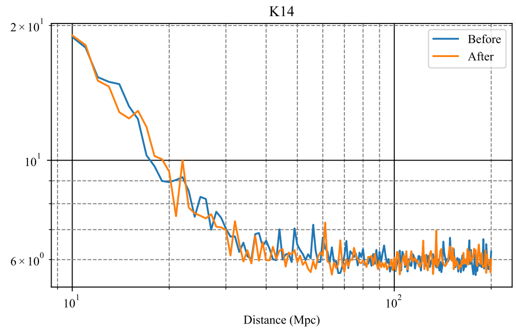


図 5.120　SNR の変化（K14）

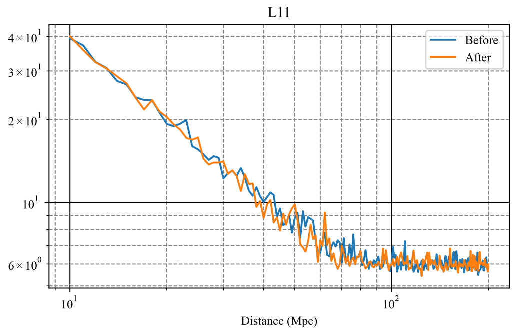


図 5.121　SNR の変化（L11）

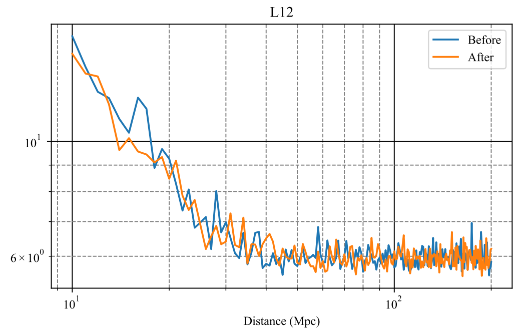


図 5.122　SNR の変化（L12）

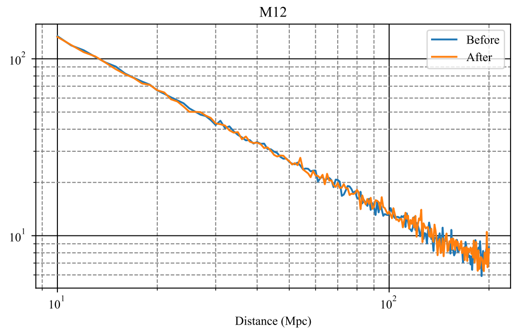


図 5.123　SNR の変化（M12）

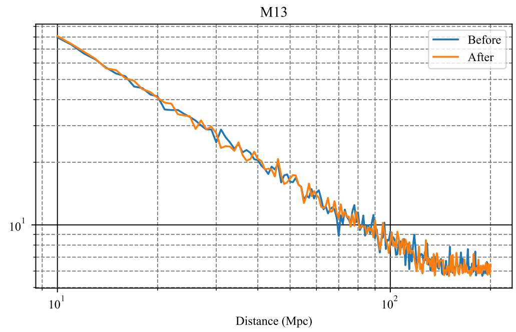


図 5.124　SNR の変化（M13）

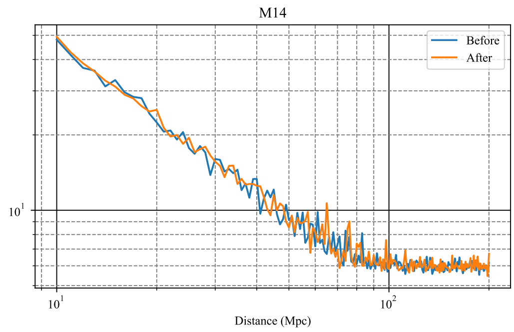


図 5.125　SNR の変化（M14）

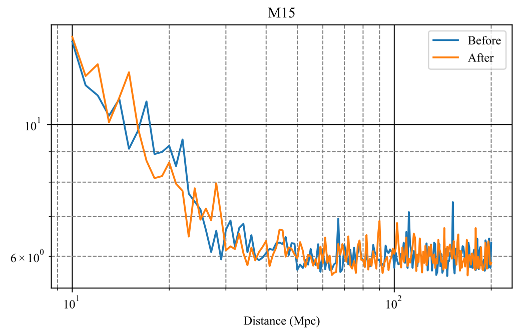


図 5.126　SNR の変化（M15）

一方、RSNR はモデルによって違いが出てくる（図 5.127–5.142）。RSNR の改善が見られるのは、J12(Iw),K13(Iw),L11(Iw),M13(Is),M14(Iw) である。元々検出可能であっ K13,M13,M14 を除くと、J12,L11 では RSNR が 10 を超える点もあり、検出可能な水準にまで達している。

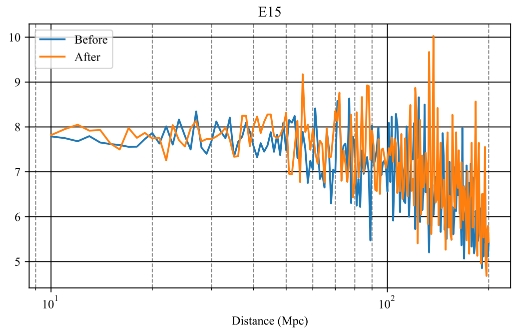


図 5.127　RSNR の変化（E15）

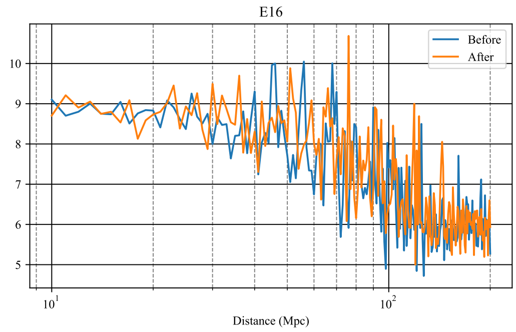


図 5.128　RSNR の変化（E16）

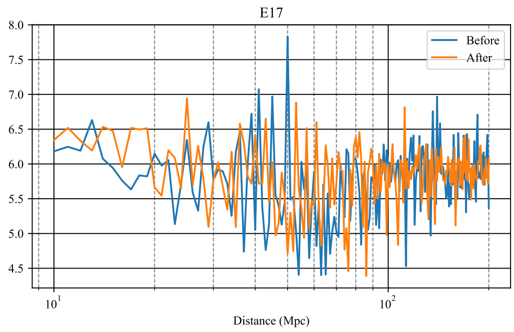


図 5.129　RSNR の変化（E17）

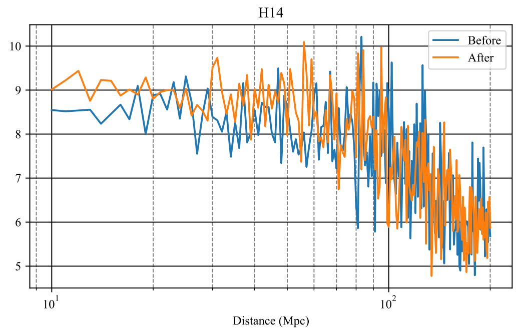


図 5.130　RSNR の変化（H14）

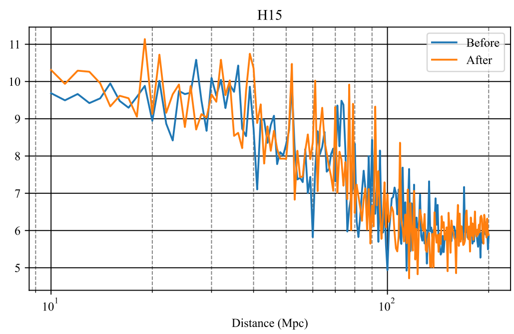


図 5.131　RSNR の変化（H15）

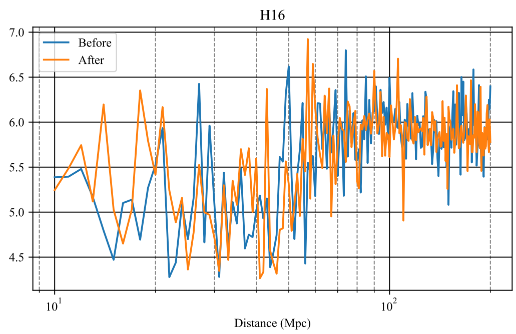


図 5.132　RSNR の変化（H16）

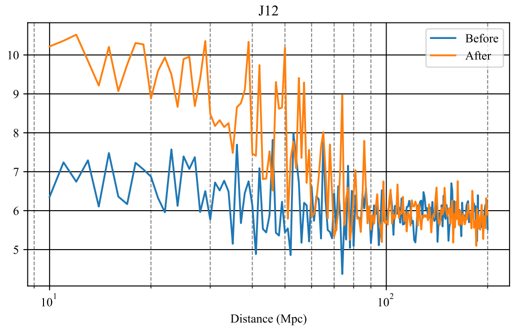


図 5.133　RSNR の変化（J12）

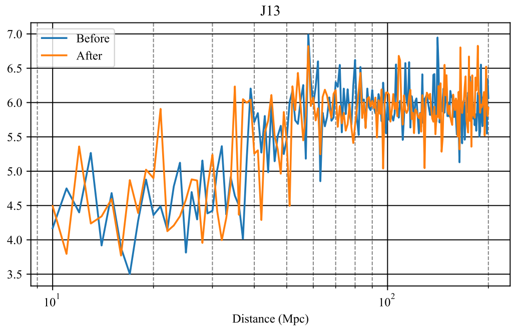


図 5.134　RSNR の変化（J13）

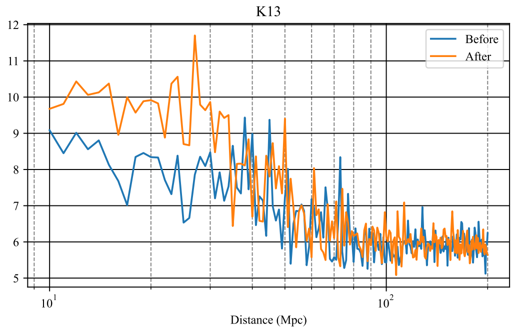


図 5.135　RSNR の変化（K13）

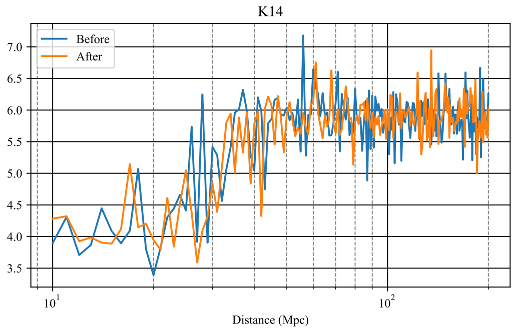


図 5.136　RSNR の変化（K14）

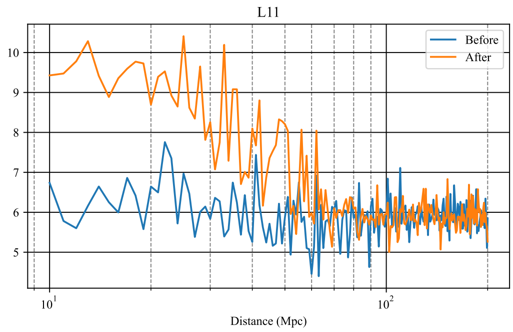


図 5.137　RSNR の変化（L11）

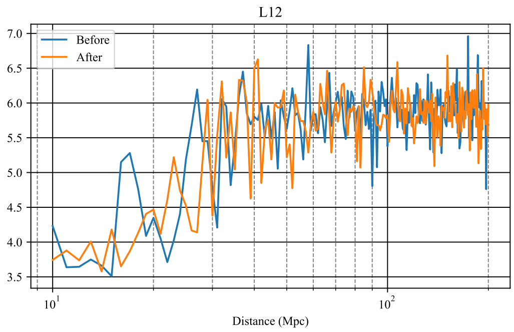


図 5.138　RSNR の変化（L12）

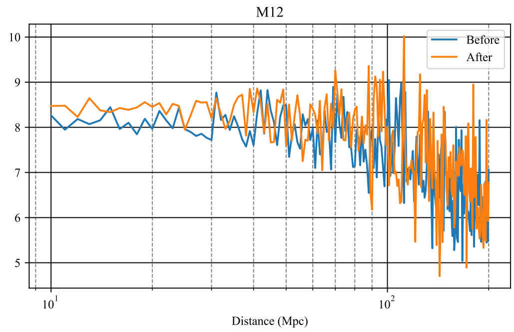


図 5.139　RSNR の変化（M12）

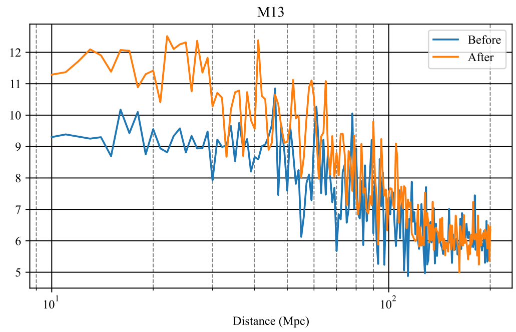


図 5.140　RSNR の変化（M13）

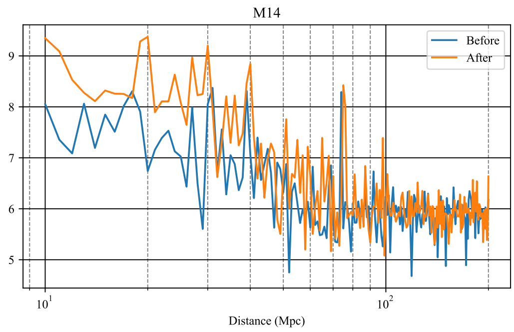


図 5.141　RSNR の変化（M14）

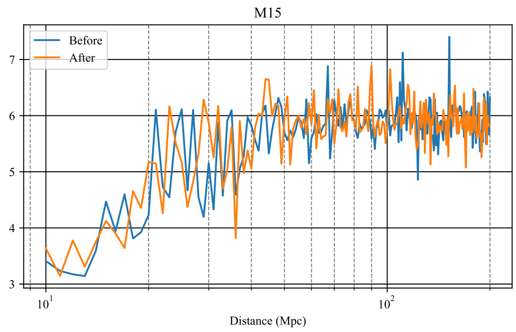


図 5.142　RSNR の変化（M15）

5.5　連星ブラックホールとしてのパラメータ推定

前節の議論では、モデル波形の中に検出可能と考えられるものが存在した。今度はそのモデル波形に対してパラメータ推定を行ってどのように見えるのかを検証してみる。代表的な波形として M13 を採用し、表 5.3 に記した距離（46.0Mpc）でスケーリングした波形で考える。パラメータ推定は `PyCBC Inference` を用いた。推定するパラメータは $(m_1, m_2, D, t_{\rm coal})$ であり、事前分布としては以下のような一様分布を取る。なお、今回は簡単のためスピンは双方のブラックホールに対して 0 で固定してある。

- (m_1, m_2)：$[50M_\odot, 200M_\odot]$ の範囲、但し $m_1/m_2 \geq 1$ で制限
- D：$6000\ {\rm Mpc} \leq D \leq 8000\ {\rm Mpc}$
- $t_{\rm coal}$：表 5.3 に記したマッチ時刻（30.55 秒）± 0.5 秒の範囲

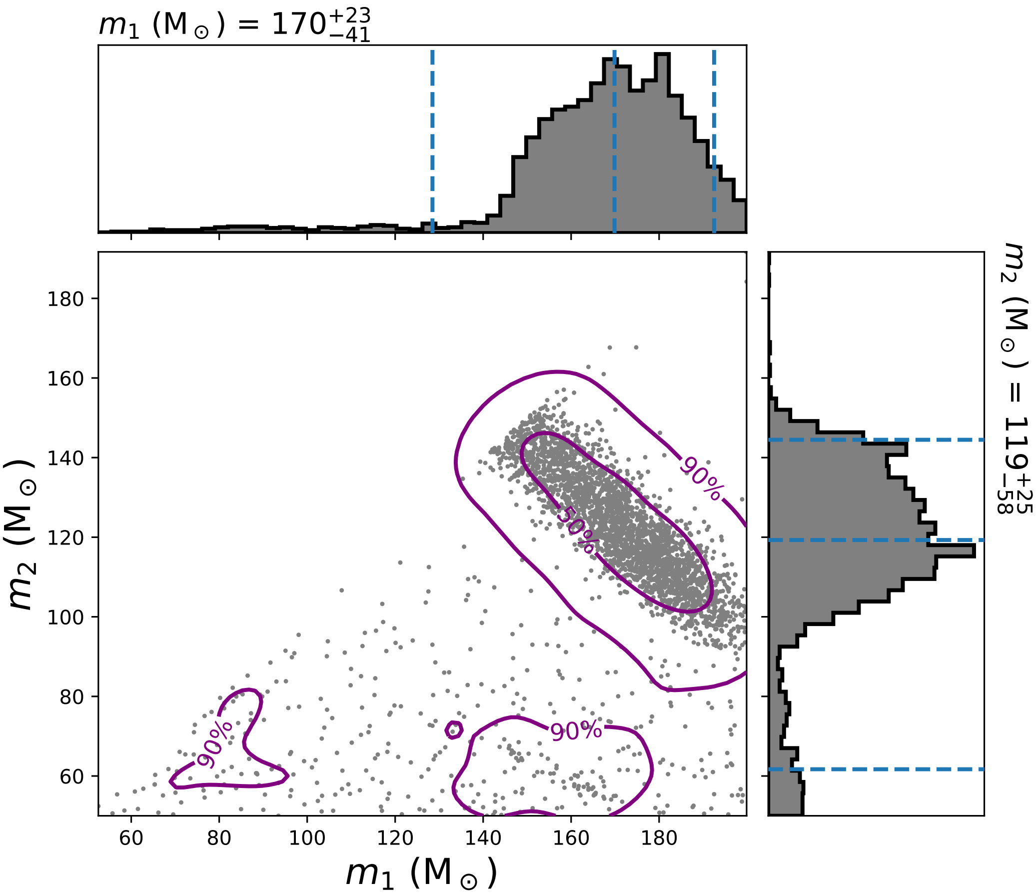


図 5.143　質量の推定結果

質量に対するパラメータ推定の結果（図 5.143）によれば、$m_1 = 170^{+23}_{-41}, m_2 = 119^{+25}_{-58}$ という推定結果を得ている。これは最適マッチのテンプレート $m_1 = 137, m_2 = 117$（表 5.4）と整合性の取れた結果になっている。つまり、M13 は連星ブラックホールとして解釈しても矛盾がないことを表している。推定によれば、$150M_\odot$ 程度のブラックホールが 2 つあることになっているが、これほど重いブラックホールの連星合体は現

時点では確認されていない。

5.6　結論及び今後の観測に向けた議論

前節 5.4 節で検証結果を述べた。この結果を改めて整理し、実際の観測計画を踏まえて観測可能性を改めて考えてみたい。まず、誤報率で判断した結果、検出可能であるとされたのは、Is 型と Iw 型の一部（K13,M14）である。表 5.3 を見ると、今回調べたモデル波形の中で最も検出可能性が高いと考えられるのは Is 型の M13 であり、46.0Mpc に位置しているとき 1 年に 2.0×10^{-7} 回の誤報率、言い換えると 5.0×10^{6} 年に 1 度のイベントであるということになる。それ以外の波形を見てみると、いずれも 5.1 節で基準として提示した「1 年に 2 回未満」の誤報率を満たしていない。この点は、柴田らの予想と食い違っている。柴田らは「Iw 型は GW190521 に似ており、検出パイプラインにおいて CBC 波形に誤認され得る」と考えていたが、検出の可能性が高いのはむしろ Is 型であった。そして、マッチしたテンプレート（表 5.4）を見ると、検出可能な重力波は（M12 を除いて）100–150$M_{\odot}$ 程度のかなり重めのブラックホール同士の合体と認識されていることが分かる。ここから分かることは、GW190521 はブラックホール-円盤系由来である可能性は低いが、ブラックホール-円盤系そのものは（パラメータに依存するものの）CBC パイプラインで検出されうるということである。

II型が CBC パイプラインで検出されないのは、そもそもモデル波形が CBC 波形と大きく違っているため予想通りであるが、検出が期待された Iw 型は予想外に検出可能性がそこまで高くないという結果になった。改めて、モデルの分類と検出可能性の対応を考えてみる。図 5.144 の上で関係性を考えてみると、柴田らによる型の分類と検出可能性の境目がずれているように見える。モデル数を増やさないと断定できないが、検出可能性を論じる際には分類の基準を変更した方が好ましいということが示唆されている。傾向としては、円盤質量 $M_{\rm disk}$ が小さいものと、円盤の外半径が大きいものは検出が難しい。波形のカットを行って検出可能性が上がったのは図 5.144 の左下に位置する L11 と J12 である。この 2 つは図 5.14 と 5.10 に示されているように、バースト部と準周期振動の切れ目がはっきりしており、なおかつ準周期振動の振幅が大きい。そのため、準周期的部分をカットすることの効果が大きく、元の波形を検出パイプラインに入力したときよりもカイ二乗統計量が小さくなり、バースト部だけが CBC テンプレートにマッチすると考えられる。

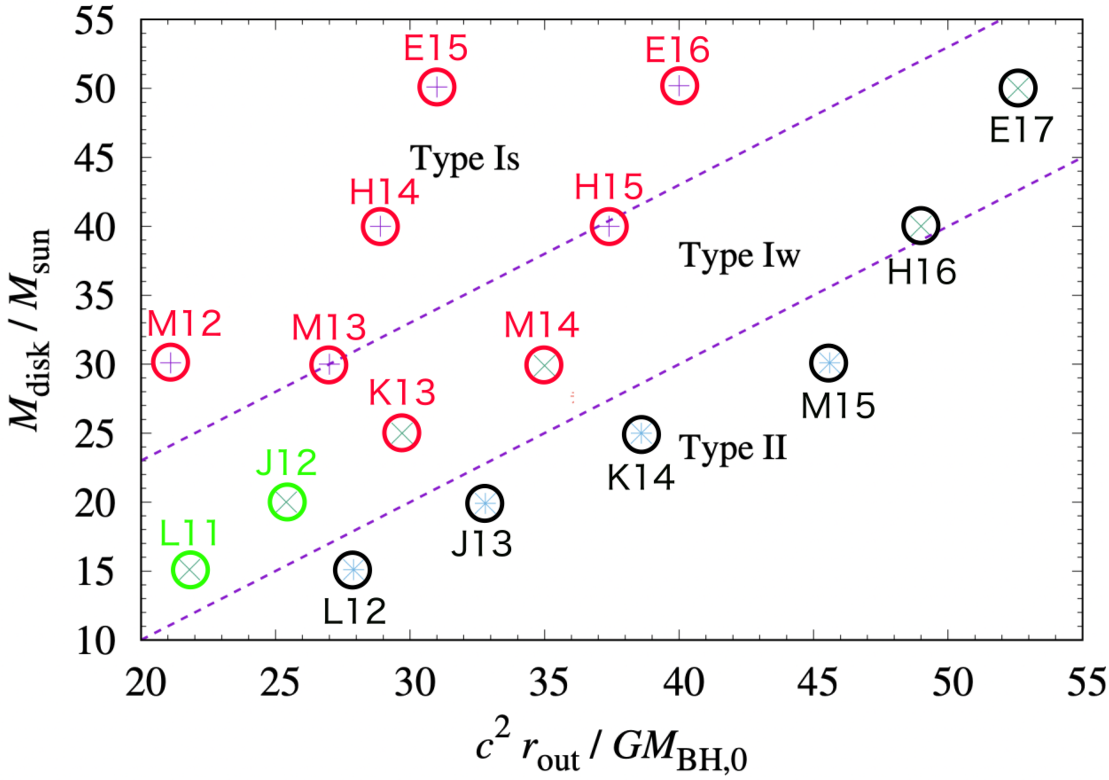


図 5.144　図 4.6 に、モデル名と検出可能性を追記したもの。赤色が検出可能、黄緑色は波形のカットによって RSNR の改善が見られ検出可能と判断されたもの、黒色は検出が難しいものを表す。

検出可能なモデルが絞れたので、今度はその検出可能な各モデル波形について、どの程度の距離までなら検出可能かを考えてみる。RSNR$\hat{\rho} \approx 8$ が検出の基準であるから、それとともに RSNR のグラフを提示する (図 5.145–5.152)。全体的な傾向として、∼100Mpc の範囲であれば $\hat{\rho} \gtrsim 8$ は達成されている。つまり、地球から∼100Mpc の範囲内にブラックホール-円盤系が存在していれば、重力波が観測可能であると考えて良いだろう。

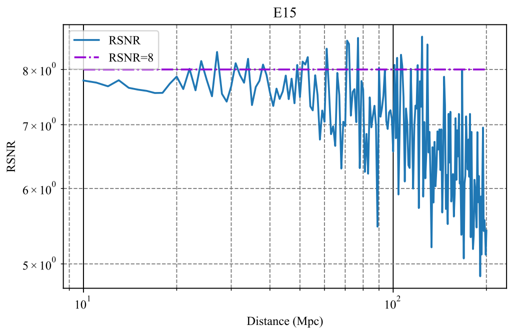


図 5.145　E15（Is 型）

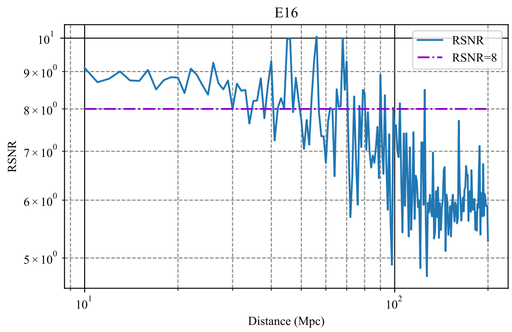


図 5.146　E16（Is 型）

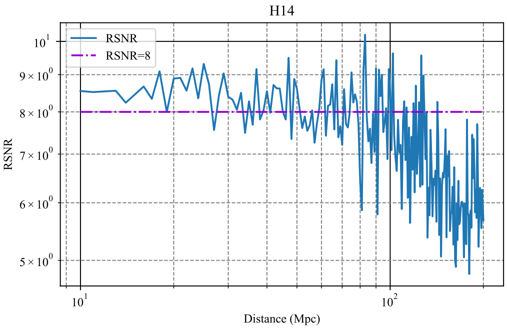


図 5.147　H14（Is 型）

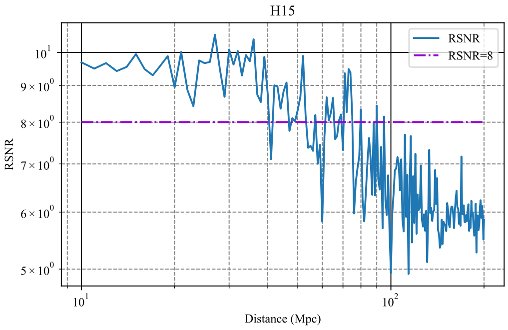


図 5.148　H15（Is 型）

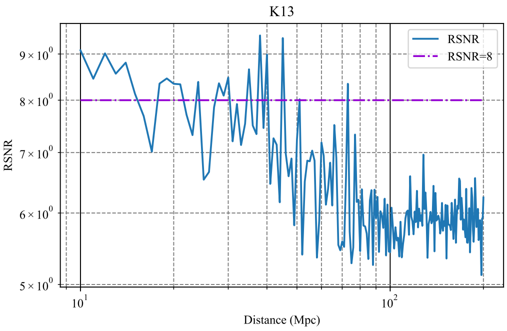


図 5.149　K13（Iw 型）

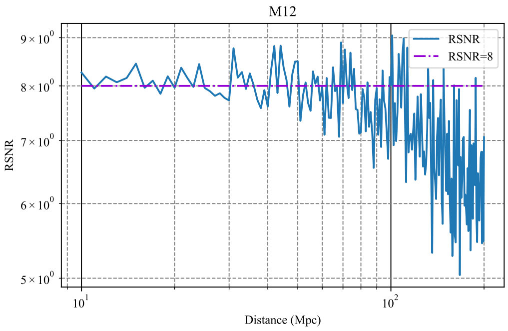


図 5.150　M12（Is 型）

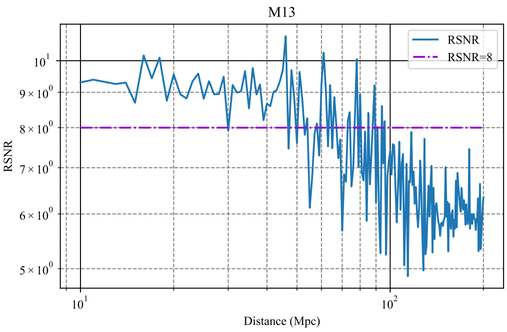


図 5.151　M13（Is 型）

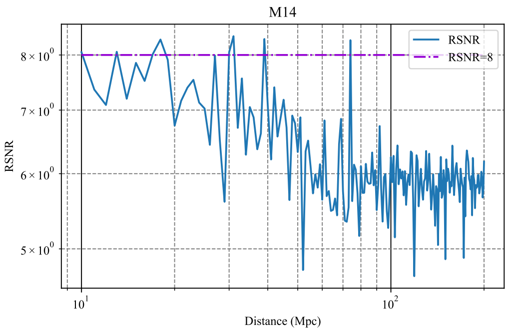


図 5.152　M14（Iw 型）

さて、ブラックホール-円盤系由来の重力波が CBC パイプラインで検出可能であることが分かったが、次はこれを CBC 波形と分別することができるのかを考えてみよう。ブラックホール-円盤系が出す重力波が、連星ブラックホール合体と違う点は 2 つある。1 つは、ブラックホール-円盤系由来の重力波では、バースト部に付随して準周期的な振動が継続する点である。CBC 波形であれば、リングダウン部は速やかに減衰し波形が見えなくなるが、ブラックホール-円盤系では（モデルに依存するが）ピークから 0.3–0.8 秒ほど継続する波形が存在する。この部分は周期性が多少あるため、周期性の無いノイズに混ぜたとしてもこの部分の周期性は表に出てきてしまう。実際に、スペクトログラムでもピークの後に大きな値を示していることが確認できる。つまり、RSNR や誤報率といった統計量だけを見るのではなく、マッチ時刻の少し後の時間を見てやって、強度のある信号が継続しているようであれば、それは CBC ではなくブラックホール-円盤系であるかもしれない。しかしながら、5.4.2 項で述べたような機構によって、準周期振動が抑制されてしまう可能性が無いとは言えない。2 つ目は、低周波領域での振る舞いである。この点は既に 4.5.1 項で言及している。低周波帯での有効振幅がブラックホール-円盤系では（CBC 波形と違って）小さくなるため、今後地上重力波検出器の低周波感度が向上したり、人工衛星型の重力波望遠鏡との共同観測によって CBC 波形との区別は十分に可能になるだろう。3 つ目は、ブラックホール-円盤系には電磁波対応天体が発見され得る（4.6 節参照）ことである。電磁波対応天体を捉え、解析すれば確実に連星ブラックホールと区別することができる。100Mpc の距離で、見かけの等級で 17–19 等級で観測されると考えられる。距離が 10 倍近くなれば見かけの等級が 5 小さくなるから、10Mpc であれば 12–14 等級で見える筈である。また、5.5 節で見たようにブラックホール-円盤系の重力波は、連星ブラックホール合体として解釈すると $150M_{\odot}$ 程度のかなり重めなブラックホールを 2 つ必要とする。このような CBC は現時点では確認できていないが、今後観測の結果としてこれほど重いブラックホールが出てくるのであれば、ブラックホール-円盤系由来の可能性も考慮するべきであろう。

Is 型の CBC パイプラインでの検出可能性は示せたが、重力波検出の解析手法はマッチドフィルター法に限らない。II 型を始めとして、CBC パイプラインでの検出が難しいと考えられるモデルに関して、他の探索方法を考えてみる。候補として挙げられるのは、バーストサーチ[*7]と呼ばれるテンプレートを必要としない探索手法である。バーストサーチでは、入力データの中で振幅が大きい箇所をトリガーとして取る。　テンプレートを用意しないため、超新星爆発などの理論的な重力波波形の計算が難しい天体に対しても有用であり、前もって大量のテンプレートを準備するのが難しいブラックホール-円盤系への応用も有効である。しかし、テンプレートを使わない代わりにバーストサーチで得られる SNR は小さくなるため、検出有意性も低くなってしまうだろう。

最後に、本稿で扱いきれなかった論点を纏めておこう。

重力波の到来方向について議論の余地が無いわけではないが、今回の議論に関してはほとんど問題は無いと思われる。まず、重力波検出器は真上からの入射に対して最も感度が良く、それ以外の角度に対しては感度が下がることはあれど上がることはない。それゆえ、重力波の入射方向を変えたとして、今回議論した検出可能性はこれ以上上がることは無い。そして、偏光角 ψ によるプラスモードとクロスモードの混合も、波形を著しく変えるものではないから検出可能性の議論という観点においては影響は少ない。

先に述べた通り、CBC 波形とブラックホール-円盤系由来の重力波は低周波領域で違いが存在する。そのため、探索においては $f_{\rm low}$ の値によって結果が変わる可能性がある。この点に関しては更なる検討が必要だろう。

また、今回はガウスノイズのみを考えているが、実際の観測では大きな非ガウスノイズが入ってきてしま

[*7] 代表的なライブラリとしては `cWB`(coherent WaveBurst) [109] がある。

う。今回使用したノイズは、図 5.1 で示した PSD に従って生成したガウスノイズであるが、この PSD は Advanced LIGO の最も楽観的な設計感度である。現実的なノイズを入力した場合には、誤報率が今回計算した値より高くなることが予想されるが、どれほど RSNR の値が変わるかどうかは別途検証する必要がある。

これまで見たように、$\gtrsim$ 100Mpc の距離が空いてしまうとノイズに埋もれてしまうため、観測に掛かるためには $\lesssim$ 100Mpc の領域から重力波を発する必要がある。しかしながら、大質量ブラックホールと円盤からなる系が現実に$\sim$100Mpc の領域で存在するのかは考察が余地がある。今回考えた大質量ブラックホール-円盤系の生成ルートの 1 つとして、4.2 節で議論した通り、極めて大質量で高速回転する金属欠乏星の重力崩壊がある。そのような天体は天文学・宇宙物理学的に興味深いが、現時点で確認されておらず、存在可能性はどれぐらいなのか分からない。もっとも、議論せずとも$\sim$100Mpc の範囲にブラックホール-円盤系が存在する可能性は 0 ではなく、裏を返せばブラックホール-円盤系の重力波が観測されたならば、そのような天体の存在証明になるとも言える。

附録 A

赤道座標系

天文学においては、天球上に張られた座標で天体の位置が示される。このような座標系を総称して天球座標系と呼ぶが、その中でも最もよく用いられるのが赤道座標系（equatorial coordinate system）である。赤道座標系は赤道面を基準面とし、そこからの角度のずれを座標として用いている。

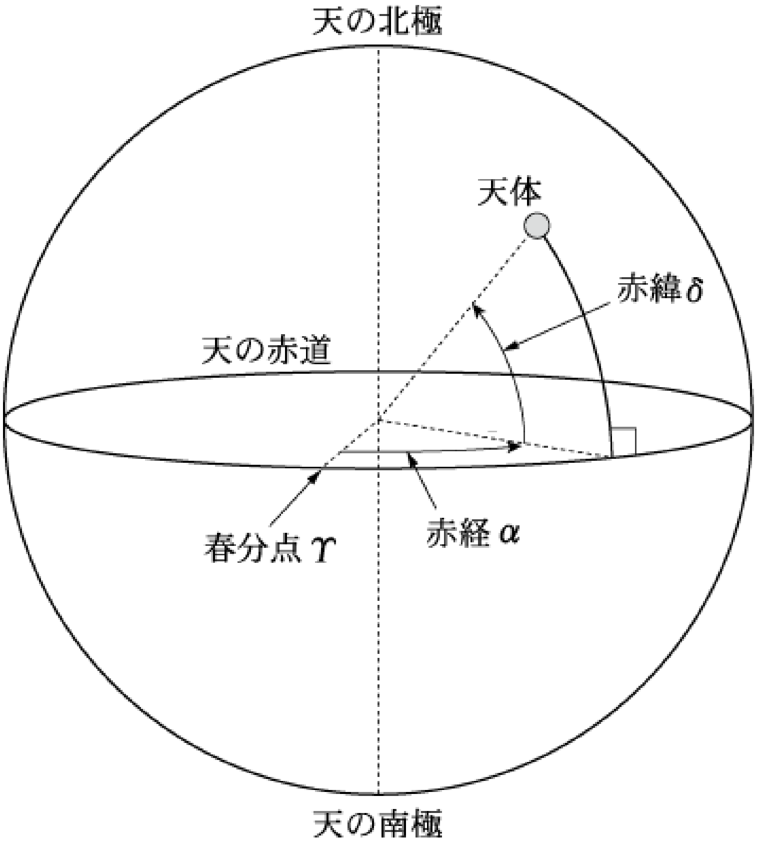


図 A.1　赤道座標系の模式図 [110]

赤道座標系を定めるには、まず天の極と天の赤道を決める必要がある。天の極とは、地球の自転軸が天球と交わる点のことであり、北側を天の北極、南側を天の南極と呼ぶ。また、天の赤道とは地球の赤道面が天球と交わる交線のことである。

1 つ目の座標が赤経（right ascension）である。これは、天の赤道上で東の方向へ測った角度であり、0 度は春分点（vernal equinox）の方向に取る。赤経は角度であるが、慣習的に時間を使って表されることが多い。すなわち、天の赤道を 24 等分し春分点を 0 時、以後東周りに 1 時、2 時（あるいは、0 時間、1 時間、2 時間）と数えていく。この 1 時を 60 分割したものが分、1 分をさらに 60 分割したものが秒とされる。赤経は α で表されることが多い。

2 つ目の座標は赤緯（declination）である。これは南北方向に測る角度で、赤緯 0° は天の赤道、赤緯 90° は天の北極、赤緯-90° が天の南極となるように決める。赤緯は δ で表されることが多い。

注意すべき点として、春分点や赤道面は常に一定ではなく、地球の歳差（precession）や章動（nutation）[*1] によって変化してしまうことが挙げられる。そのため、正確に運用するには基準となる時刻を指定する必要がある [111]。1 つのやり方として観測時の瞬間的な時刻を取ってくる方法がある。また、元期（epoch）と呼ばれる基準時を定め、章動を平均化した上で座標を取るやり方もあり、J2000.0（2000 年 1 月 1 日正午）を元期としたものが天文学では広く使われている。

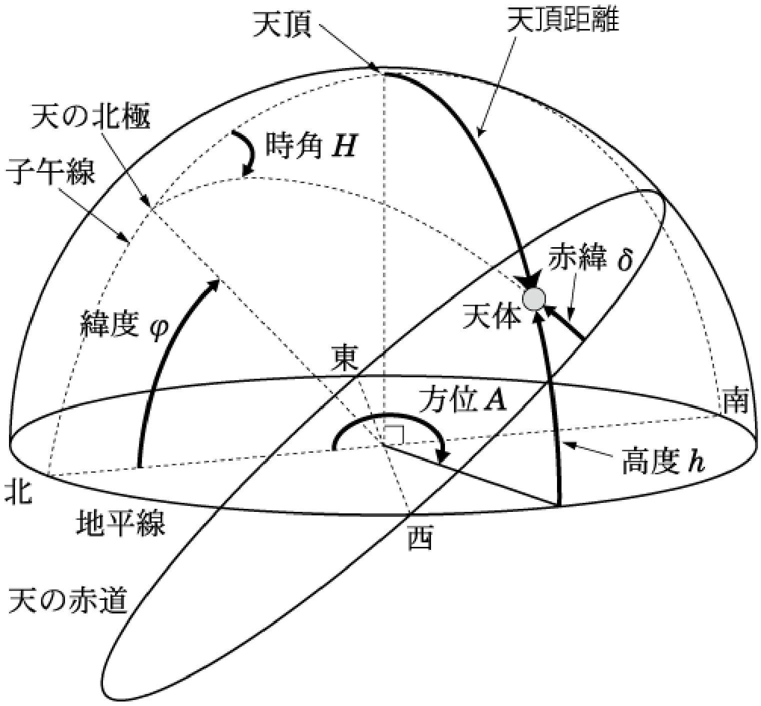


図 A.2　地表座標系と赤道座標系の比較 [110]

[*1] 歳差とは、地球の極軸（自転軸）の向きが変動する現象を指し、その主な原因は月と太陽の引力である。章動とは、歳差よりも短い周期で極軸が変動する現象を指す。これは、太陽や月の位置が時々刻々と動くことに起因する。詳しい理論は [110] を参照。

附録 B

恒星進化論

恒星進化論（stellar evolution）とは、恒星が誕生してから終焉に至るまでの過程を体系的に整理することを目指す理論のことである。恒星の一生を追うことは、重力波天文学のターゲットであるブラックホールや中性子星、超新星爆発の成り立ちを知る上で欠かすことができない。本章では、恒星進化論の概観を述べていく。詳細は [112–115] などを参照されたい。なお、恒星の進化を追うには、ヘルツシュプルング・ラッセル図（Hertzsprung-Russell Diagram、略して HR 図と言うことが殆ど）が有用である。これは、縦軸には恒星の絶対等級（光度）、横軸には星の表面温度を表す指標としてスペクトル型を定め*1、それぞれの恒星についてプロットしたものである。

恒星の形成は、希薄な星間分子雲に密度分布の濃淡が生じ、分子雲が重力崩壊を始めるところから始まる。この分子雲の高密度部分が重力収縮を起こし、分子雲コアと呼ばれる力学平衡を保った塊が形成されて、周囲のガスを降着させることで成長していく。周囲にある降着円盤が中心に落ち込んでいくと、落下の運動エネルギーが熱に変換され、電磁波を放出するようになる。この状態の星のことを原始星（protostar）と言う。

原始星が重力収縮していき中心温度が 10^7K を超えると、水素からヘリウムを作る核融合反応が起こるようになる。ここで放出されるエネルギーが重力収縮を押し止め、静水圧平衡*2の安定した状態になる。この状態の星のことを主系列星 (main sequence star) と呼び、HR 図では右下から左上にかけて斜め帯状の領域を占める。主系列星では、水素燃焼*3が星を膨張させる作用をするが、星が膨張すると温度が下がり核融合が抑制されるフィードバックが働く。このフィードバックによって、主系列星は極めて安定した状態にあり、長時間輝き続けることができる。

主系列星中心部の核融合が十分進行し、中心部の水素を使い果たすとヘリウムからなる中心核と水素の外層部分に分かれる構造に変わっていく。すると、ヘリウム中心核は重力を支えるエネルギー源を失い、重力収縮を始める。それによって核の温度が上昇し、核の周りの水素の燃焼（殻燃焼）によって星が輝くようになる。この反応によって、外層がより外側に押し出される。すると断熱膨張によって表面温度が下がり、星が赤色に見えるようになる。これが赤色巨星（red giant）である。HR 図上では、主系列を離れて右上に移動する。この枝分かれのことを赤色巨星分枝 (red giant branch) と呼ぶ。この先は、質量によって運命が分岐する。

質量が約 $2M_\odot$ より小さい場合は、主系列段階終了後のヘリウム中心核の密度が重力収縮によって大きくなり、ヘリウム燃焼が始まる前に電子が縮退した状態になっている。電子が縮退した状態では圧力が温度に依存しなくなるため、ヘリウム燃焼が起きて温度が上昇しても圧力が上がらず膨張しない。そのため、ヘリウ

*1 表面温度を表す指標であれば何でもよく、色指数や有効温度を用いる場合もある。
*2 静水圧平衡とは、重力と圧力が各点で釣り合っている状況のことを指す。
*3 燃焼とは、同種の元素同士を使って自身より重い元素を生成する核融合反応を比喩的に指す語である。

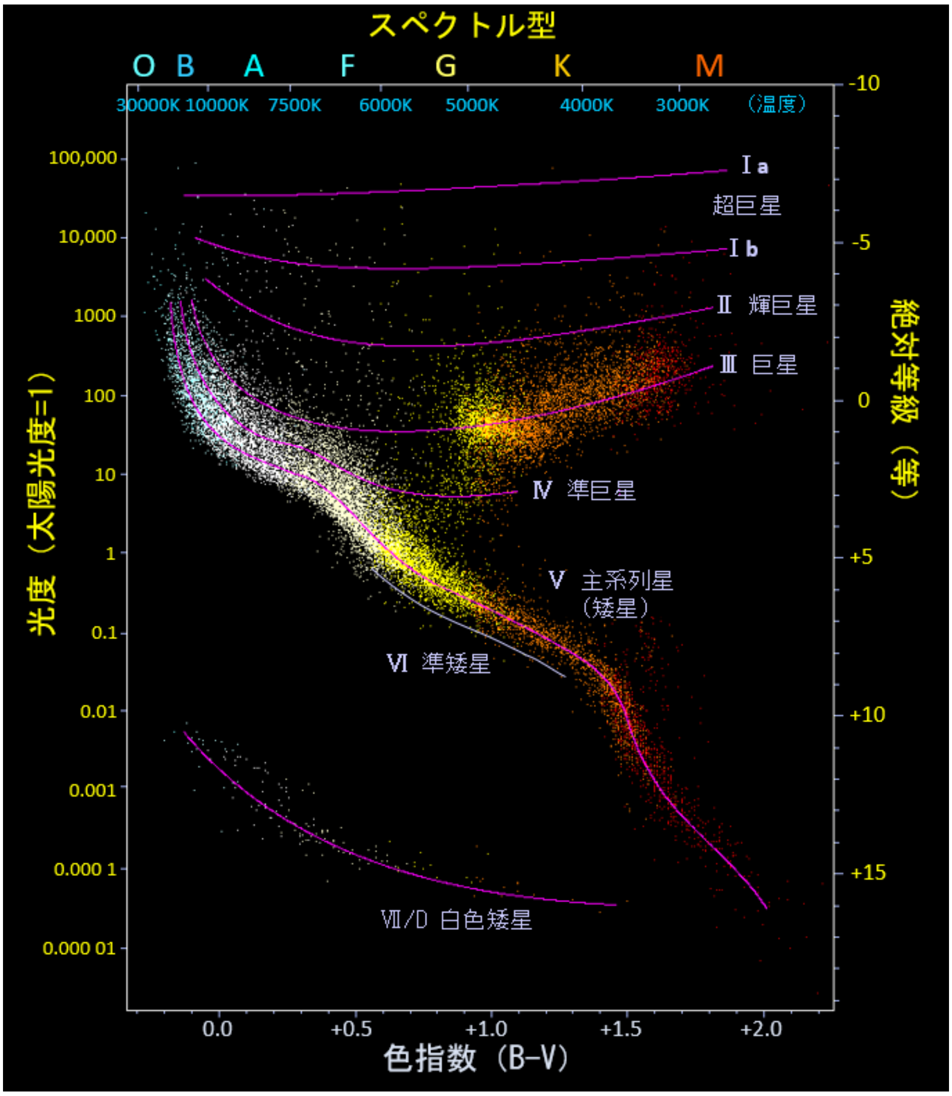


図 B.1　ヘルツシュプルング・ラッセル図。[116] より引用

ム燃焼が暴走してしまう。この暴走的な核融合反応のことをヘリウムフラッシュ（helium flash）という。やがて暴走反応が落ち着くと、この段階の光度はヘリウム燃焼の始まる中心核で決まるためほぼ一定となるが、温度は外層の質量や金属量に依存するため HR 図上で水平な系列を成す。この系列を水平分枝（horizontal branch）と呼ぶ。

質量が約 $2M_\odot$ より大きい場合は、中心温度が 10^8K 程度に達するためヘリウム燃焼が起き、炭素と酸素が生成され、炭素と酸素からなる核（CO コア）が生じる。その後、全体の質量がどれぐらい大きいかによって、核の到達できる温度が決まるため、それに伴って生成できる元素が決まってくる。約 $8M_\odot$ より小さい場合、CO コアで電子が縮退し、炭素燃焼や酸素燃焼を起こすほどには温度が上がらなくなる。これらの星は、HR 図上で漸近巨星分枝（asymptotic giant branch）と呼ばれる、赤色巨星分枝に近い系列が形作るため、AGB 星と呼ばれることが多い。そしてこの AGB 星は、脈動*4や恒星風による質量放出のために外層が吹き飛ば

*4 星自身が膨張と収縮を繰り返すこと。

されていく。こうして吹き飛ばされた外層が惑星状星雲（planetary nebula）となり、残った核は白色矮星（white dwarf）となる。白色矮星は、核融合を起こすほど高温ではなく、電子の縮退圧によって自己重力を支えている。エネルギー源が無いため強く輝くことが出来ず、光度は低く HR 図では下部に位置する。白色矮星が通常の恒星と連星系を成すと、白色矮星に恒星からの水素ガスが降着する。それが白色矮星の強い重力で圧縮されると暴走的な核融合を引き起こし、白色矮星の表面全体が爆発してしまう。これが新星（nova）として観測される現象である。

質量が約 $8M_\odot$ より大きい場合は、CO コアが重力収縮し更に温度が上昇するため、炭素燃焼が起き、その生成物からさらに原子番号の大きい元素が生成されていく。質量に応じて核の到達できる温度が決まり、質量が $10M_\odot$ 以上あれば最終的に鉄を生成するまでに至る。

質量が $25M_\odot$ を超えるような大質量星は、恒星風が強く、赤色巨星になる前に外層が吹き飛んでしまう。そのため、高温の核が露出し、エネルギーの高さから青色に輝く。この状態の星を、ウォルフ・ライエ星（Wolf-Rayet star）と呼び、HR 図上でもっとも左上の領域を占める。外層が吹き飛んでしまっていることから、スペクトルに水素の輝線がほぼ見られない特徴を示す。

$8M_\odot$ を超える恒星は、その最期に超新星爆発（supernova explosion）[*5]と呼ばれる爆発を経験する。超新星は分光観測により分類が行われる。分光観測でスペクトルを見たとき、水素の吸収線が無いものを I 型と呼ぶ。I 型の中でも更に細かく分類されており、ケイ素の吸収線があるものが Ia 型、ヘリウムの吸収線があるものが Ib 型、そのどちらも見えないものが Ic 型と呼ばれている。そして、水素の吸収線があり様々な個性を示すものがII型と分類されている。まず、Ia 型は近接連星系中の白色矮星が爆発したものだと考えられている。白色矮星が縮退物質で構成されていることは述べたが、電子の縮退圧で支えられる質量には理論的な限界がある。これをチャンドラセカール限界（Chandrasekhar limit）といい、数値にして約 $1.4M_\odot$ である。伴星からの降着、或いは白色矮星同士の連星合体によって白色矮星の質量がこれを超えると、爆発的な反応を起こし、それが超新星爆発として観測されると考えられている。Ia 型超新星爆発は、チャンドラセカール限界という定量的な制約があるためにどれも似たような絶対光度を示すが、それを逆手に取って距離を測ることができ、標準光源（standard candle）として利用可能な天体の一種である。Ia 型超新星爆発は、天文学や宇宙論において極めて重要な役割を果たしている。対する Ib 型、Ic 型、II型は大質量星の重力崩壊によって起きると考えられている。Ib 型と Ic 型は、水素がほぼ存在していないことからウォルフ・ライエ星の爆発が由来であるとされる。II型は赤色巨星の重力崩壊が起源であるとされている。質量が 8–$10M_\odot$ の赤色巨星では、ネオンやマグネシウムが電子捕獲反応を起こし始める。すると電子が減り中性子が大量に作られるようになるため、電子の縮退圧で支えられていた中心核の圧力が一気に下がって重力を支えられなくなり、恒星は一気に収縮する。$10M_\odot$ 以上の星では、核にある鉄が高エネルギーのガンマ線によって分解される光分解反応が起きる。

$$^{56}\mathrm{Fe} + \gamma \longrightarrow 13\,^4\mathrm{He} + 4n$$

この反応は吸熱反応であるから、核の圧力が急激に下がり、やはり重力崩壊を起こす。このタイプの超新星は、中心部が一気に収縮すると外層が中心に向かって落ち込む。その重力崩壊で得られた重力ポテンシャルが爆発の原動力と考えられているが、爆発のメカニズムは詳しく分かっておらず、現在も研究が精力的に続けられている。質量が $40M_\odot$ を超えるような星が爆発すると、通常よりも大きなエネルギーを放出する超新星爆発となり、これは極超新星（hypernova）と呼ばれ、通常の超新星と区別されることがある。

こうして重い恒星は超新星爆発を以って終焉を迎えるが、その後に残るものも恒星の質量によって異なる。

[*5] 新星よりも遥かに明るく光ることからこの名前が付けられた。

8–10$M_\odot$ の赤色巨星が爆発すると、中心にほぼ中性子だけでできた超高密度の中性子星ができる。中性子星は中性子の縮退圧で支えられており、白色矮星と同じようにチャンドラセカール限界の制約を受けるため、数太陽質量程度の質量を取るとされている。約 30$M_\odot$ の星の爆発では、中心に中性子星が残っても質量が大きすぎるために、ブラックホールになってしまうと考えられている。これが恒星ブラックホール（stellar black hole）と呼ばれる質量帯のブラックホールの起源とされている。一方、吹き飛ばされた外層の方は、周囲の星間物質（星間ガス）との間に衝撃波を形成し、ガスが高温に加熱されて、数万年にわたり光り輝き続ける。これは超新星残骸（supernova remnant）と呼ばれ、宇宙線の起源と考えられている。

参考文献

[1] R. A. Hulse and J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *The Astrophysical Journal*, 195:L51–L53, January 1975. URL: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...195L..51H, doi:10.1086/181708.

[2] B. P. Abbott et al. GW150914: First results from the search for binary black hole coalescence with Advanced LIGO. *Phys. Rev. D*, 93(12):122003, June 2016. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.122003, doi:10.1103/PhysRevD.93.122003.

[3] B. P. Abbott et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs. *Phys. Rev. X*, 9(3):031040, September 2019. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.031040, doi:10.1103/PhysRevX.9.031040.

[4] R. Abbott et al. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo during the First Half of the Third Observing Run. *Phys. Rev. X*, 11(2):021053, June 2021. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.11.021053, doi:10.1103/PhysRevX.11.021053.

[5] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration. GWTC-2.1: Deep Extended Catalog of Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run, May 2022. URL: http://arxiv.org/abs/2108.01045, doi:10.48550/arXiv.2108.01045.

[6] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, and the KAGRA Collaboration. GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run, January 2021. URL: http://arxiv.org/abs/2111.03606, doi:10.48550/arXiv.2111.03606.

[7] J. M. Weisberg and Y. Huang. RELATIVISTIC MEASUREMENTS FROM TIMING THE BINARY PULSAR PSR B1913+16. *The Astrophysical Journal*, 829(1):55, September 2016. URL: https://dx.doi.org/10.3847/0004-637X/829/1/55, doi:10.3847/0004-637X/829/1/55.

[8] Robert M. Wald. *General relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[9] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, and David Kaiser. *Gravitation*. Princeton University Press, Princeton, N.J, 1973.

[10] Eric Poisson. *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1. publ edition, 2004.

[11] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[12] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, Oxford, 2008.

[13] 須藤靖. **一般相対論入門 改訂版**. 日本評論社, 2019.

[14] 中野董夫. **相対性理論**. 物理入門コース 新装版. 岩波書店, 2017.

[15] 内山龍雄. **一般相対性理論**. 物理学選書. 裳華房, 2001.

[16] 石橋明浩. **ブラックホールの数理 : その大域構造と微分幾何**. 臨時別冊・数理科学. サイエンス社, 2018.

[17] Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson. *Gravitational-wave physics and astronomy: an introduction to theory, experiment and data analysis*. Wiley series in cosmology. Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2011.

[18] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, September 1998. URL: `https://dx.doi.org/10.1086/300499`, `doi:10.1086/300499`.

[19] The Supernova Cosmology Project. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, June 1999. URL: `https://dx.doi.org/10.1086/307221`, `doi:10.1086/307221`.

[20] Roger Penrose. Gravitational Collapse: the Role of General Relativity. *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 1:252, January 1969. URL: `https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1969NCimR...1..252P`.

[21] Klaas Landsman. Singularities, Black Holes, and Cosmic Censorship: A Tribute to Roger Penrose. *Foundations of Physics*, 51(2):42, March 2021. `doi:10.1007/s10701-021-00432-1`.

[22] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1):L1, April 2019. Publisher: The American Astronomical Society. URL: `https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7`, `doi:10.3847/2041-8213/ab0ec7`.

[23] The Basics of Binary Coalescence. Publication Title: SOUNDS OF SPACETIME. URL: `https://www.soundsofspacetime.org/the-basics-of-binary-coalescence.html`.

[24] B. P. Abbott et al. A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant. *Nature*, 551(7678):85–88, January 2017. URL: `https://www.nature.com/articles/nature24471`, `doi:10.1038/nature24471`.

[25] Eleonora Di Valentino et al. In the realm of the Hubble tension—a review of solutions. *Classical and Quantum Gravity*, 38(15):153001, July 2021. `doi:10.1088/1361-6382/ac086d`.

[26] B. P. Abbott et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161101, October 2017. URL: `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.161101`, `doi:10.1103/PhysRevLett.119.161101`.

[27] K. Hirata et al. Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A. *Physical Review Letters*, 58(14):1490–1493, April 1987. URL: `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1490`, `doi:10.1103/PhysRevLett.58.1490`.

[28] 鈴木英之, 固武慶. 重力崩壊型超新星爆発の物理. URL: `https://bridge.kek.jp/lecture/03-kotake/LectureNote.pdf`.

[29] Planck Collaboration. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, September 2020. URL: `http://arxiv.org/abs/1807.06209`, `doi:10.1051/`

0004-6361/201833910.

[30] J. Weber. Gravitational-wave-detector events. *Physical Review Letters*, 20(23):1307–1308, June 1968. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.20.1307, doi:10.1103/PhysRevLett.20.1307.

[31] Lee Samuel Finn. Response of interferometric gravitational wave detectors. *Phys. Rev. D*, 79(2):022002, January 2009. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.022002, doi:10.1103/PhysRevD.79.022002.

[32] 川村静児. アインシュタインからの宿題: 重力波の検出 (< 特集 > 発展し続ける一般相対論-時空論の起承転 "望"-). 日本物理学会誌, 70(2):125–129, 2015. doi:10.11316/butsuri.70.2_125.

[33] John T Whelan. The Geometry of Gravitational Wave Detection. URL: https://dcc.ligo.org/public/0106/T1300666/003/Whelan_geometry.pdf.

[34] Gravitational-Wave Observatories Across the Globe. Publication Title: LIGO Lab \textbar Caltech. URL: https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20160211c.

[35] LIGO-G2002127: Observing Scenario timeline graphic, post-O3. URL: https://dcc.ligo.org/LIGO-G2002127/public.

[36] The LIGO Scientific Collaboration. Advanced LIGO. *Classical and Quantum Gravity*, 32(7):074001, March 2015. URL: https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/7/074001, doi:10.1088/0264-9381/32/7/074001.

[37] LIGO - A Gravitational-Wave Interferometer. URL: https://www.ligo.caltech.edu/page/ligo-gw-interferometer.

[38] Elena Cuoco. Virgo in a nutshell. URL: http://public.virgo-gw.eu/virgo-in-a-nutshell/.

[39] KAGRA Gallery - KAGRA 大型低温重力波望遠鏡. URL: https://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/kagra-gallery.

[40] M. Soares-Santos et al. The Electromagnetic Counterpart of the Binary Neutron Star Merger LIGO/Virgo GW170817. I. Discovery of the Optical Counterpart Using the Dark Energy Camera. *The Astrophysical Journal Letters*, 848(2):L16, October 2017. URL: https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa9059, doi:10.3847/2041-8213/aa9059.

[41] P. S. Cowperthwaite et al. The Electromagnetic Counterpart of the Binary Neutron Star Merger LIGO/Virgo GW170817. II. UV, Optical, and Near-infrared Light Curves and Comparison to Kilonova Models. *The Astrophysical Journal Letters*, 848(2):L17, October 2017. URL: https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa8fc7, doi:10.3847/2041-8213/aa8fc7.

[42] M. Nicholl et al. The Electromagnetic Counterpart of the Binary Neutron Star Merger LIGO/Virgo GW170817. III. Optical and UV Spectra of a Blue Kilonova from Fast Polar Ejecta. *The Astrophysical Journal Letters*, 848(2):L18, October 2017. URL: https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa9029, doi:10.3847/2041-8213/aa9029.

[43] R. Chornock et al. The Electromagnetic Counterpart of the Binary Neutron Star Merger LIGO/Virgo GW170817. IV. Detection of Near-infrared Signatures of r-process Nucleosynthesis with Gemini-South. *The Astrophysical Journal Letters*, 848(2):L19, October 2017. URL: https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa905c, doi:10.3847/2041-8213/aa905c.

[44] Stefano Valenti et al. The Discovery of the Electromagnetic Counterpart of GW170817: Kilo-

nova AT 2017gfo/DLT17ck. *The Astrophysical Journal*, 848(2):L24, October 2017. doi:10.3847/2041-8213/aa8edf.

[45] R. Abbott et al. GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of $150M_{\odot}$. *Phys. Rev. Lett.*, 125(10):101102, September 2020. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.125.101102, doi:10.1103/PhysRevLett.125.101102.

[46] 岡村定矩, 他. 天文学辞典. 日本評論社, 2012.

[47] Gary S. Fraley. Supernovae explosions induced by pair-production instability. *Astrophysics and Space Science*, 2(1):96–114, August 1968. doi:10.1007/BF00651498.

[48] S. E. Woosley. Pulsational pair-instability supernovae. *The Astrophysical Journal*, 836(2):244, February 2017. Publisher: The American Astronomical Society. URL: https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/836/2/244, doi:10.3847/1538-4357/836/2/244.

[49] Shing-Chi Leung, Ken' ichi Nomoto, and Sergei Blinnikov. Pulsational Pair-instability Supernovae. I. Pre-collapse Evolution and Pulsational Mass Ejection. *The Astrophysical Journal*, 887(1):72, February 2019. URL: https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab4fe5, doi:10.3847/1538-4357/ab4fe5.

[50] M. J. Graham et al. Candidate Electromagnetic Counterpart to the Binary Black Hole Merger Gravitational-Wave Event S190521g. *Phys. Rev. Lett.*, 124(25):251102, June 2020. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.251102, doi:10.1103/PhysRevLett.124.251102.

[51] Yin-Jie Li et al. GW190426_152155: a merger of neutron star-black hole or low mass binary black holes?, February 2020. URL: http://arxiv.org/abs/2012.04978, doi:10.48550/arXiv.2012.04978.

[52] C.S. Unnikrishnan. IndIGO and LIGO-India: Scope and plans for gravitational wave research and precision metrology in India. *International Journal of Modern Physics D*, 22(01):1341010, 2013.

[53] Karsten Danzmann and Albrecht Rüdiger. LISA technology—concept, status, prospects. *Classical and Quantum Gravity*, 20(10):S1, April 2003. URL: https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/20/10/301, doi:10.1088/0264-9381/20/10/301.

[54] M. Armano et al. Sub-Femto-g Free Fall for Space-Based Gravitational Wave Observatories: LISA Pathfinder Results. *Phys. Rev. Lett.*, 116(23):231101, June 2016. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.231101, doi:10.1103/PhysRevLett.116.231101.

[55] Seiji Kawamura et al. The Japanese space gravitational wave antenna: DECIGO. *Classical and Quantum Gravity*, 28(9):094011, April 2011. URL: https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/28/9/094011, doi:10.1088/0264-9381/28/9/094011.

[56] DECIGO とは - DECIGO |DECi-hertz Interferometer Gravitational wave Observatory. URL: https://decigo.jp/wdecigo.html.

[57] David Reitze et al. Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO, July 2019. URL: http://arxiv.org/abs/1907.04833, doi:10.48550/arXiv.1907.04833.

[58] M. Punturo et al. The Einstein Telescope: a third-generation gravitational wave observatory. *Classical and Quantum Gravity*, 27(19):194002, September 2010. URL: https://dx.doi.org/10.

1088/0264-9381/27/19/194002, doi:10.1088/0264-9381/27/19/194002.

[59] Jeff Crowder and Neil J. Cornish. Beyond LISA: Exploring future gravitational wave missions. *Phys. Rev. D*, 72(8):083005, October 2005. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.083005, doi:10.1103/PhysRevD.72.083005.

[60] Jun Luo et al. TianQin: a space-borne gravitational wave detector. *Classical and Quantum Gravity*, 33(3):035010, January 2016. URL: https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/33/3/035010, doi:10.1088/0264-9381/33/3/035010.

[61] Alessandra Buonanno and B. S. Sathyaprakash. Sources of Gravitational Waves: Theory and Observations. In Abhay Ashtekar, Beverly K. Berger, James Isenberg, and MalcolmEditors MacCallum, editors, *General Relativity and Gravitation: A Centennial Perspective*, pages 287–346. Cambridge University Press, 2015. doi:10.1017/CBO9781139583961.009.

[62] Stefano Foffa and Riccardo Sturani. Effective field theory methods to model compact binaries. *Classical and Quantum Gravity*, 31(4):043001, January 2014. URL: https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/31/4/043001, doi:10.1088/0264-9381/31/4/043001.

[63] Rafael A. Porto. The effective field theorist’s approach to gravitational dynamics. *Physics Reports*, 633:1–104, 2016. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157316300370, doi:https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.04.003.

[64] Theocharis A. Apostolatos, Curt Cutler, Gerald J. Sussman, and Kip S. Thorne. Spin-induced orbital precession and its modulation of the gravitational waveforms from merging binaries. *Phys. Rev. D*, 49(12):6274–6297, June 1994. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.49.6274, doi:10.1103/PhysRevD.49.6274.

[65] Patricia Schmidt et al. Towards models of gravitational waveforms from generic binaries: II. Modelling precession effects with a single effective precession parameter. *Phys. Rev. D*, 91(2):024043, January 2015. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.024043, doi:10.1103/PhysRevD.91.024043.

[66] Masaru Shibata and Takashi Nakamura. Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. *Physical Review D: Particles and Fields*, 52(10):5428–5444, November 1995. Number of pages: 0 Publisher: American Physical Society. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.5428, doi:10.1103/PhysRevD.52.5428.

[67] Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro. Numerical integration of Einstein’s field equations. *Physical Review D: Particles and Fields*, 59(2):024007, December 1998. Number of pages: 7 Publisher: American Physical Society. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.024007, doi:10.1103/PhysRevD.59.024007.

[68] Larry Smarr and James W. York. Kinematical conditions in the construction of spacetime. *Physical Review D: Particles and Fields*, 17(10):2529–2551, May 1978. Number of pages: 0 Publisher: American Physical Society. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.17.2529, doi:10.1103/PhysRevD.17.2529.

[69] 真貝寿明 and 米田元. 数値相対論における定式化問題：一般相対論における数値シミュレーションを安定化させる指針の探求. 応用数理, 15(1):2–15, 2005. doi:10.11540/bjsiam.15.1_2.

[70] Imre Bartos and Marek Kowalski. *Multimessenger astronomy*. IOP Publishing, Bristol [England]

(Temple Circus, Temple Way, Bristol BS1 6HG, UK), 2017.

[71] B. P. Abbott et al. Tests of General Relativity with GW170817. *Phys. Rev. Lett.*, 123(1):011102, July 2019. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.011102, doi:10.1103/PhysRevLett.123.011102.

[72] Xiaoshu Liu et al. Measuring the speed of gravitational waves from the first and second observing run of Advanced LIGO and Advanced Virgo. *Phys. Rev. D*, 102(2):024028, July 2020. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.024028, doi:10.1103/PhysRevD.102.024028.

[73] P. Welch. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2):70–73, June 1967. doi:10.1109/TAU.1967.1161901.

[74] Daniel George et al. Classification and unsupervised clustering of LIGO data with Deep Transfer Learning. *Phys. Rev. D*, 97(10):101501, May 2018. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.101501, doi:10.1103/PhysRevD.97.101501.

[75] Bruce Allen et al. FINDCHIRP: An algorithm for detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries. *Phys. Rev. D*, 85(12):122006, June 2012. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.122006, doi:10.1103/PhysRevD.85.122006.

[76] Nicholas Rahardiyan Rypkema. A Straightforward Derivation of the Matched Filter. preprint, Open Science Framework, April 2019. URL: https://osf.io/gsjx3, doi:10.31219/osf.io/gsjx3.

[77] Bruce Allen. χ^2 time-frequency discriminator for gravitational wave detection. *Physical Review D: Particles and Fields*, 71(6):062001, March 2005. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.062001, doi:10.1103/PhysRevD.71.062001.

[78] Kipp Cannon et al. Likelihood-Ratio Ranking Statistic for Compact Binary Coalescence Candidates with Rate Estimation, April 2015. URL: http://arxiv.org/abs/1504.04632, doi:10.48550/arXiv.1504.04632.

[79] S. Babak et al. Searching for gravitational waves from binary coalescence. *Phys. Rev. D*, 87(2):024033, January 2013. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.024033, doi:10.1103/PhysRevD.87.024033.

[80] J. Abadie et al. Search for gravitational waves from low mass compact binary coalescence in LIGO's sixth science run and Virgo's science runs 2 and 3. *Phys. Rev. D*, 85(8):082002, April 2012. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.082002, doi:10.1103/PhysRevD.85.082002.

[81] B. P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6):061102, February 2016. Number of pages: 16 Publisher: American Physical Society tex.collaboration: LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102, doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102.

[82] I. W. Harry et al. A hierarchical search for gravitational waves from supermassive black hole binary mergers. *Classical and Quantum Gravity*, 25(18):184027, September 2008. doi:10.1088/0264-9381/25/18/184027.

[83] I. W. Harry et al. Stochastic template placement algorithm for gravitational wave data analy-

sis. *Phys. Rev. D*, 80(10):104014, January 2009. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.104014, doi:10.1103/PhysRevD.80.104014.

[84] Gian Mario Manca and Michele Vallisneri. Cover art: Issues in the metric-guided and metric-less placement of random and stochastic template banks. *Phys. Rev. D*, 81(2):024004, January 2010. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.024004, doi:10.1103/PhysRevD.81.024004.

[85] sbank, March 2022. URL: https://github.com/gwastro/sbank.

[86] Alex Nitz et al. PyCBC software. URL: https://github.com/gwastro/pycbc.

[87] Duncan A. Brown. Using the INSPIRAL program to search for gravitational waves from low-mass binary inspiral. *Classical and Quantum Gravity*, 22(18):S1097, September 2005. URL: https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/22/18/S24, doi:10.1088/0264-9381/22/18/S24.

[88] Collin D Capano. *Searching for gravitational waves from compact binary coalescence using LIGO and virgo data*. Syracuse University, 2011.

[89] Samantha A. Usman et al. The PyCBC search for gravitational waves from compact binary coalescence. *Classical and Quantum Gravity*, 33(21):215004, October 2016. doi:10.1088/0264-9381/33/21/215004.

[90] C. M. Biwer et al. PyCBC Inference: A Python-based Parameter Estimation Toolkit for Compact Binary Coalescence Signals. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 131(996):024503, January 2019. doi:10.1088/1538-3873/aaef0b.

[91] Masaru Shibata et al. Alternative possibility of GW190521: Gravitational waves from high-mass black hole-disk systems. *Phys. Rev. D*, 103(6):063037, March 2021. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.063037, doi:10.1103/PhysRevD.103.063037.

[92] R. Gamba, M. Breschi, G. Carullo, S. Albanesi, P. Rettegno, S. Bernuzzi, and A. Nagar. GW190521 as a dynamical capture of two nonspinning black holes. *Nature Astronomy*, pages 1–7, November 2022. Publisher: Nature Publishing Group. URL: https://www.nature.com/articles/s41550-022-01813-w, doi:10.1038/s41550-022-01813-w.

[93] Isobel Romero-Shaw et al. GW190521: Orbital Eccentricity and Signatures of Dynamical Formation in a Binary Black Hole Merger Signal. *The Astrophysical Journal Letters*, 903(1):L5, October 2020. URL: https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abbe26, doi:10.3847/2041-8213/abbe26.

[94] V. Gayathri et al. Eccentricity estimate for black hole mergers with numerical relativity simulations. *Nature Astronomy*, 6(3):344–349, March 2022. URL: https://www.nature.com/articles/s41550-021-01568-w, doi:10.1038/s41550-021-01568-w.

[95] Juan Calderón Bustillo et al. Confusing Head-On Collisions with Precessing Intermediate-Mass Binary Black Hole Mergers. *Phys. Rev. Lett.*, 126(20):201101, May 2021. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.201101, doi:10.1103/PhysRevLett.126.201101.

[96] Juan Calderón Bustillo et al. GW190521 as a Merger of Proca Stars: A Potential New Vector Boson of 8.7×10^{-13} eV. *Phys. Rev. Lett.*, 126(8):081101, February 2021. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.081101, doi:10.1103/PhysRevLett.126.081101.

[97] Alexander H. Nitz and Collin D. Capano. GW190521 May Be an Intermediate-mass Ratio Inspiral.

The Astrophysical Journal Letters, 907(1):L9, January 2021. URL: https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abccc5, doi:10.3847/2041-8213/abccc5.

[98] A. Heger et al. How Massive Single Stars End Their Life. *The Astrophysical Journal*, 591(1):288, July 2003. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1086/375341/meta, doi:10.1086/375341.

[99] Haruki Uchida et al. Black Hole Formation and Explosion from Rapidly Rotating Very Massive Stars. *The Astrophysical Journal*, 870(2):98, January 2019. URL: https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aaf39e, doi:10.3847/1538-4357/aaf39e.

[100] Patryk Mach and Edward Malec. General-relativistic rotation laws in rotating fluid bodies. *Phys. Rev. D*, 91(12):124053, June 2015. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.124053, doi:10.1103/PhysRevD.91.124053.

[101] Janusz Karkowski et al. Self-gravitating axially symmetric disks in general-relativistic rotation. *Phys. Rev. D*, 97(10):104017, May 2018. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.104017, doi:10.1103/PhysRevD.97.104017.

[102] Sho Fujibayashi et al. Mass ejection from disks surrounding a low-mass black hole: Viscous neutrino-radiation hydrodynamics simulation in full general relativity. *Phys. Rev. D*, 101(8):083029, April 2020. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.083029, doi:10.1103/PhysRevD.101.083029.

[103] James M. Bardeen et al. Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation. *The Astrophysical Journal*, 178:347–370, February 1972. URL: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1972ApJ...178..347B, doi:10.1086/151796.

[104] Sho Fujibayashi, Koh Takahashi, Yuichiro Sekiguchi, and Masaru Shibata. Ultra-delayed neutrino-driven explosion of rotating massive-star collapse. *The Astrophysical Journal*, 919(2):80, September 2021. Publisher: The American Astronomical Society. URL: https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac10cb, doi:10.3847/1538-4357/ac10cb.

[105] Sho Fujibayashi, Yuichiro Sekiguchi, Masaru Shibata, and Shinya Wanajo. Collapse of rotating massive stars leading to black hole formation and energetic supernovae, December 2022. arXiv:2212.03958 [astro-ph]. URL: http://arxiv.org/abs/2212.03958, doi:10.48550/arXiv.2212.03958.

[106] Sascha Husa et al. Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. I. New numerical waveforms and anatomy of the signal. *Physical Review D: Particles and Fields*, 93(4):044006, February 2016. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.044006, doi:10.1103/PhysRevD.93.044006.

[107] Sebastian Khan et al. Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. II. A phenomenological model for the advanced detector era. *Physical Review D: Particles and Fields*, 93(4):044007, February 2016. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.044007, doi:10.1103/PhysRevD.93.044007.

[108] LIGO-T0900288-v3: Advanced LIGO anticipated sensitivity curves. URL: https://dcc.ligo.org/LIGO-T0900288/public.

[109] cWB Development Team and the LIGO / Virgo Collaborations. coherent WaveBurst. URL:

https://gwburst.gitlab.io/.

[110] 伊藤孝士, 福島登志夫. 天体の位置と運動 第二版. シリーズ現代の天文学. 日本評論社, 2017.

[111] 暦 Wiki/歳差・章動と座標系 - 国立天文台暦計算室. URL: https://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/wiki/BAD0BAB9A1A6BECFC6B0A4C8BAC2C9B8B7CF.html.

[112] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: the physics of compact objects*. Wiley, 1983.

[113] 野本憲一, 他. 恒星. シリーズ現代の天文学. 日本評論社, 2009.

[114] Rudolf Kippenhahn et al. *Stellar structure and evolution*. Astronomy and astrophysics library. Springer, second edition edition, 2012.

[115] 高原文郎. 宇宙物理学*:* 星銀河宇宙論 新版. 朝倉書店, 2015.

[116] HR 図 | 天文学辞典. URL: https://astro-dic.jp/hertzsprung-russell-hr-diagram/.